DOI:10.14139/j.cnki.cn22-1228.2010.04.020
第23卷 第4期 大 学 物 理 实 验 Vol. 23 No. 4
2010年8月 PHYSICAL EXPERIMENT OF COLLEGE Aug. 2010

文章编号：1007-2934(2010)04-0080-03

贝塞尔公式的推导及其物理意义探讨

庄正辉，吴先球，陈 浩
（华南师范大学，广东 广州 510006）

摘 要：通过介绍贝塞尔公式的推导，并与另外两条类似的误差公式进行比较，讨论了贝塞尔公式的物理意义及其准确性，分析了贝塞尔公式相关的物理意义。

关 键 词：贝塞尔公式；标准差；相对标准差
中图分类号：O 241.1 **文献标识码**：A

物理实验一般需要进行多次独立测量求解真实值，在满足正态分布条件时使用 $X=\frac{\sum x_i}{N}=\bar{x}$ 和贝塞尔公式 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})}$，这是物理实验误差计算的常用公式。而测绘教材[1,3] 和物理实验教材[2,4,5] 对贝塞尔公式的推导有不同介绍，不同的推导方法之间也存在差异[6]，而没有强调贝塞尔公式本身及公式推导过程的物理意义。

学习贝塞尔公式之前已经知道了

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-X)^2} \tag{1}$$

并且 $X=\frac{\sum x_i}{N}=\bar{x}$，但是为什么不能代入得到

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2} \tag{2}$$

贝塞尔公式与公式(1)、(2)之间存在什么区别和联系。本文通过对这些问题的解答及分析揭示贝塞尔公式的物理意义。

1 贝塞尔公式推导的简单介绍及分析

设

$$k_i=x_i-\bar{x} \tag{3}$$

$d_i=x_i-X$。则

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d_i^2 \tag{4}$$

$$k_i=x_i-\bar{x}=x_i-\frac{\sum x_i}{N}=x_i-X-\frac{\sum(x_i-X)}{N}=d_i-\frac{\sum d_i}{N}$$，k_i 平方后进行求和，得到：

$$\sum k_i^2=\sum d_i^2-2\frac{(\sum d_i)^2}{N}+N\left(\frac{(\sum d_i)^2}{N}\right)^2$$

$$=\sum d_i^2-\frac{(\sum d_i)^2}{N}$$

其中 $(\sum d_i)^2=\sum d_i\times\sum d_j$

$$=\sum_i d_i^2+\sum_{j,j\neq i}\sum_i d_i\times d_j$$

因在测量中的正负误差出现的机会相等，此时

$$\frac{(\sum d_i)^2}{N}=\frac{\sum_i d_{2i}}{N} \tag{5}$$

所以

$$\sum k_i^2=\sum d_i^2-\frac{\sum d_i^2}{N}=\frac{N-1}{N}\sum d_i^2 \tag{6}$$

将(3)、(4)两式代入(6)式，得到贝塞尔公式

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})}$$

整个推导过程没有用到 $X=\frac{\sum x_i}{N}=\bar{x}$ 的条件，唯一用了近似解的是(5)式。一般认为[2,3,7] $\frac{(\sum d_i)^2}{N}=\frac{\sum_i d_i^2}{N}$ 从两个极限进行证明，当 $N\to 1$ 时，$\frac{\sum_{j,j\neq i}\sum_i d_i\times d_j}{N}$ 为极小量，当 N 趋于无穷时，由于 N 在分母，$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{j,j\neq i}\sum_i d_i\times d_j}{N}=0$。但是由两

收稿日期：2010-04-23

种极限进行推理的物理意义并不清晰。

2 贝塞尔公式更准确描述标准差的比较分析

标准差本身也有误差。理论上获得的标准差是利用无穷多次测量值按定义或者贝塞尔公式算得的，是一个常数 S，使用有限次测量值得到的标准差 σ 也是有误差的[8]。一般使用相对标准差（误差的误差）来讨论用什么样的公式或方法计算标准差的估计值有最小误差。

对于使用贝塞尔公式的相对标准差 $\dfrac{|S-\sigma|}{S}=\sqrt{\dfrac{1}{2(N-1)}}$，下面使用公式（2），预计其相对标准差将大于 $\sqrt{\dfrac{1}{2(N-1)}}$，其物理含义是公式（2）并没有贝塞尔公式那么准确的描述测量的标准差。

假设 N 次测量满足正态、独立和相同测量条件，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})}{\sigma^2}:\chi^2(N-1) \tag{7}$$

使用公式 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})}$ 代入上式，得到 $\dfrac{Ns^2}{\sigma^2}:\chi^2(N-1)$，取 $\chi^2(N-1)$ 的方差，有 $D\left[\dfrac{Ns^2}{\sigma^2}\right]=\dfrac{N^2D(s^2)}{\sigma^4}=2(N-1)$，其中 $D(s^2)=(s^2-\sigma^2)^2$ 注意到 $\sigma=(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$，将 σ 在 s 做泰勒展开，并取一阶近似，可以得到：

$$s-\sigma=\left(\frac{1}{2}(s^2)^{\frac{1}{2}}\right)(s^2-\sigma^2)$$

两边平方，得到：

$$\begin{aligned}(s-\sigma)^2&=\left(\frac{1}{2}(s^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2(s^2-\sigma^2)^2\\&=\frac{1}{4}(s^2)^{1}\frac{2\sigma^4(N-1)}{N^2}\\&=\frac{s^2(N-1)}{2N^2}\end{aligned}$$

（最后一步用 s 代 σ），即

$$(s-\sigma)^2=\frac{s^2(N-1)}{2N^2}$$

最后得到

$$\frac{|S-\sigma|}{S}=\sqrt{\frac{N}{N-1}}\sqrt{\frac{1}{2(N-1)}}>\sqrt{\frac{1}{2(N-1)}} \tag{8}$$

用公式（2）得到的相对标准差比贝塞尔公式大，说明用贝塞尔公式来描述标准差更加准确。

3 贝塞尔公式及其相关物理意义

（1）从贝塞尔公式的推导过程可以发现，整个推理过程用到了公式（1），因此贝塞尔公式要求次测量值服从正态分布。贝塞尔公式并没有使用 $X=\dfrac{\sum x_i}{N}=\overline{x}$，而是强调 $\dfrac{\sum_{i,j\neq i}\sum_i d_i\times d_j}{N}$ 在两个极限条件下趋向于零。因此，这里贝塞尔公式在非理想情况下是含有误差的公式。当 $N\to\infty$ 是由于 N 在分母使之趋于零，因此认为贝塞尔公式中测量值与真值的差的绝对值 $|x_i-X|$ 相对于 N 来说是可以忽略的。

（2）$\dfrac{\sum_{i,j\neq i}\sum_i d_i\times d_j}{N}$ 在两个极限下趋于零，但在有限次测量下存在误差。在需要精确结果的计算中[9]，使用 因子对贝塞尔公式进行修正，并且在测量次数 $N>7$ 时，t 因子影响计算结果的数量级为 10^{-2}。而且随着测量次数的增加，所需要的修正也越来越小，从另一个角度来说就是贝塞尔公式可以越来越准确地作为标准差了。

相对标准差 $\dfrac{|S-\sigma|}{S}$ 用于描述标准差的准确程度。在实验测量和教学中很少谈到相对标准差，只是因为相对与真实值而言，标准差已经很小，而相对标准差比标准差更小，因此平时并不严格区别而已。

（3）将贝塞尔公式与错误的公式（2）进行区分：在不知道真实值，且 $x_1=X$ 时，标准差贝塞尔公式无意义，这是与实际的测量物理含义是符合的。因为标准差表示测量值与真实值的离散程度，不知道真实值的情况下只进行一次测量，即便认为，也无所谓偏离真实值的离散程度。而如果错误地使用了公式（2）进行计算，即使得到了标准差，这个标准差的物理意义也是无法被描述的。基本的理由是：不知道真实值情况下的单次测量，是无法确定标准差的。

当 $N>1$，可以比较两个公式的相对标准差。

从不等式(8)可以看出贝塞尔公式更加准确。从计算方便的角度仅仅可以说当 较大时,使用公式(2)计算得到的结果与贝塞尔公式差不多,但是绝不说明这条公式物理意义的正确性。

(4)将贝塞尔公式与公式(1)进行区分:两公式的根本区别是适用情况不同,公式(1)是在知道真实值情况下使用,而不知道真实值情况下使用贝塞尔公式。由于这个根本原因,公式(6)中使用知道真实值的分布 $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - X)^2}{\sigma^2}:\chi^2 N$ 进行推导,并使用公式(1)代入计算,最后可以得到相对标准差 $\frac{|S-\sigma|}{S} = \sqrt{\frac{1}{2N}}$,比贝塞尔公式的相对标准差 $\sqrt{\frac{1}{2(N-1)}}$ 小。这个结果是符合物理意义的,因为公式(1)是在知道真实值的前提下得到的相对标准差,比贝塞尔公式的情况知道了更多有用信息——真实值,因此其标准差可以更加准确,即相对标准差比较小。当测量次数 变大时,因为贝塞尔公式进行了测量值正态分布的假设,其相对标准差与公式(1)的相对标准差的差别不再明显,并且变得趋向于理想条件:无穷多次测量,即 $\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2N}} = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2(N-1)}} = 0$。

两条公式是在不同的情况下使用的,并不能因为哪条公式更加准确而摒弃另一条。以上对两者的准确性进行比较就是为了说明由于适用情况不同,使两条公式产生了差异。

4 结 论

综上所述,通过对贝塞尔公式推导过程的分析,揭示了推导过程所蕴涵的物理意义及合理性;通过贝塞尔公式与错误的公式(2)比较,可以反映贝塞尔公式描述标准差的准确性;通过贝塞尔公式与错误的公式(1)比较,阐明贝塞尔公式的适用情况,并对极限情况下两公式的相似进行了说明,从而加深对贝塞尔公式的理解。

参考文献:

[1] 沙定国.误差分析与测量不确定度评定[M].北京:中国计量出版社,2003:53-54.

[2] 梁晋文、陈林才、何贡.误差理论与实验数据处理[M](第二版).北京:中国计量出版社,2001:12-15.

[3] 彭长清.误差与回归[M].北京:兵器工业出版社,1991:79-81.

[4] 冯师颜.误差理论与实验数据处理[M].北京:科学出版社,1964:28-30.

[5] John R. Taylor. An Introduction to Error Analysis [M]. University Science Books,1981:294-298.

[6] 邓永和.中误差贝塞尔公式的推导[J].大地测量与地球动力学,2009,(29):128-130.

[7] 谷秀娥.关于标准误差和标准偏差的讨论[J].大学物理实验,2006,(19):66-67.

[8] 肖明.误差利于常见问题与解答[M].北京:计量出版社,1980:21-22.

[9] 贺水燕、文盛乐、蔡静等.对用贝塞尔公式评定不确定度的思考[J].大学物理实验,2006,(19):63-67.

Discussions of the Bessel Formula's Derivation and its Physical Significance

ZHUANG Zheng-hui, WU Xian-qiu, CHEN Hao

(South China Normal University, Guangzhou 510006)

Abstract: The derivation of Bessel Formula is introduced. Comparing with the other two similar error formulas, its physical significance and veracity are discussed.

Key words: Bessel Formula; standard deviation; relative standard deviation