

圆度误差的最小二乘法、最小包容区域法和最优函数法评定精度之比较

田 树 耀

(福建华侨大学机电学院, 泉州 362021)

摘 要 目的在于寻找符合最小条件的圆度误差评定方法。首先详细介绍圆度误差评定的最小二乘法、最小包容区域法和最优函数法的算法模型与实现方法; 然后, 在三坐标测量机上对被测圆进行采样点坐标数据提取, 分别用最小二乘法、最小包容区域法和最优函数法对给定圆进行误差评定。结果表明, 最小包容区域法评定精度最高, 最优函数法评定精度次之, 最小二乘法评定精度较低。

关键词 圆度误差; 最小二乘法; 区域搜索; M T A L A B; 评定精度

0 引言

圆度公差是评价回转体零件的一项重要精度指标, 它用于控制被测圆柱面任一正截面上的实际圆相对于理想圆的变动量^[1]。圆度误差的大小将直接影响到零件的回转精度、配合面的接触状况及耐磨性等, 因此圆度误差的精确测量与评定无论对零件合格性的判定, 还是对圆度误差产生原因的判断与消除都是十分重要的。随着三坐标测量机、圆度仪等自动数据采集仪器日益广泛的应用, 坐标测量值原则越来越有取代测量特征参数原则和控制实效边界原则之势成为圆度误差的主要测量原则^[2]。基于测量坐标值原则下圆度误差的测量一般在圆度仪或三坐标测量机上实现。GB/T 7235—2004 规定了圆度误差的 4 种评定方法: 最小区域法、最小二乘法、最小外接圆法和最大内接圆法^[3]。其中, 最小二乘法因其理论成熟、算法简便易行等优点应用最为普遍, 甚至被列为欧美国家的标准。但最小二乘法并不能提供满足最小条件的圆度误差评定结果。研究人员研究了多种方法以获得最小区域的圆度误差评定结果, 但这些方法大都由于算法复杂, 不易被工程实际人员掌握。本文提出最优函数法评定圆度误差的数学模型, 深入探讨了最小二乘法、最小包容区域法和最优函数法的算法模型与实现方法。

1 圆度误差评定的最小二乘法

设 $(x_i, y_i), i=1, 2, \cdots, n, n>3$ 为被测实际圆

周上的测量采样点。设待求最小二乘圆的方程为: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, 其中 (x_0, y_0) 为最小二乘圆的圆心, R 为最小二乘圆的半径。令

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}-R \\ \epsilon_2 = \sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}-R \\ \epsilon_n = \sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}-R \end{cases} \quad (1)$$

最小二乘法的目标函数为 $J(x_0, y_0, R)=\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$, 约束条件是 $J(x_0, y_0, R) \rightarrow \min$ 。要满足约束条件, 必须有

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x_0}=0 \\ \frac{\partial J}{\partial y_0}=0 \\ \frac{\partial J}{\partial R}=0 \end{cases} \quad (2)$$

将方程组(1)展开并化简得

$$\begin{cases} 2nx_0-2\sum_{i=1}^n x_i+\sum_{i=1}^n \frac{2R(x_i-x_0)}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}}=0 \\ 2ny_0-2\sum_{i=1}^n y_i+\sum_{i=1}^n \frac{2R(y_i-y_0)}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}}=0 \\ R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2} \end{cases} \quad (3)$$

最小二乘圆的圆心 (x_0, y_0) , 最小二乘圆的半

径 R 由方程组(2)求得。由此, 实际圆的圆度误差的最小二乘法评定结果为

$$\delta = \max \left\{ \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \right\} - \min \left\{ \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \right\} \quad (4)$$

2 圆度误差评定的最小区域搜索法

设 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n, n>3$ 为被测圆周上的测量采样点。采样点可以是均匀分布或非均匀分布, 采样点数目可以是偶数或奇数。区域搜索法评定圆度误差的基本方法如下:

首先, 在已经测得的被测圆周上的有效测量采样点 $(x_i, y_i), i=1, 2, \dots, n, n>3$ 中取 3 点(该 3 点大致在被测圆周上均匀分布), 以此 3 点拟合初始圆, 求取初始圆的圆心。设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 为所取的 3 个测量采样点, 初始圆的方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (5)$$

(x_0, y_0) 为待求的初始圆的圆心。将所取的 3 个测量采样点的坐标代入初始圆方程, 有

$$\begin{cases} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = R^2 \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = R^2 \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \quad (6)$$

将方程组(6)化简得

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - 2(x_1 - x_2)x_0 + y_1^2 - y_2^2 - 2(y_1 - y_2)y_0 = 0 \\ x_1^2 - x_3^2 - 2(x_1 - x_3)x_0 + y_1^2 - y_3^2 - 2(y_1 - y_3)y_0 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

解方程组得初始圆的圆心坐标, 同时可以根据方程组(6)求得初始圆的半径。初始圆的圆心坐标为

$$\begin{cases} x_0 = \frac{(y_1 - y_2)(y_1 y_2 + x_3^2) + (y_2 - y_3)(y_2 y_3 + x_1^2) - (y_1 - y_3)(y_1 y_3 + x_2^2)}{2y_1(x_3 - x_2) + 2y_2(x_1 - x_3) + 2y_3(x_2 - x_1)} \\ y_0 = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 + y_3^2) + (x_2 - x_3)(x_2 x_3 + y_1^2) - (x_1 - x_3)(x_1 x_3 + y_2^2)}{2x_1(y_3 - y_2) + 2x_2(y_1 - y_3) + 2x_3(y_2 - y_1)} \end{cases} \quad (8)$$

其次, 以上述求得的初始圆圆心作为搜索的中心, 确定合适的搜索区域大小和搜索步长。设搜索步长为 Δ , 搜索区域为以初始圆圆心 (x_0, y_0) 为中

心, 边长为 $2N\Delta$ 的正方形(见图 1)。则待搜索的点为: $(x_0 + j\Delta, y_0 + k\Delta)$, 其中 $j = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N; k = -N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N$ 搜索目标函数为:

$$\sum_{i=1}^n \{ \sqrt{[x_i - (x_0 + j\Delta)]^2 + [y_i - (y_0 + k\Delta)]^2} - R \}^2 \quad (9)$$

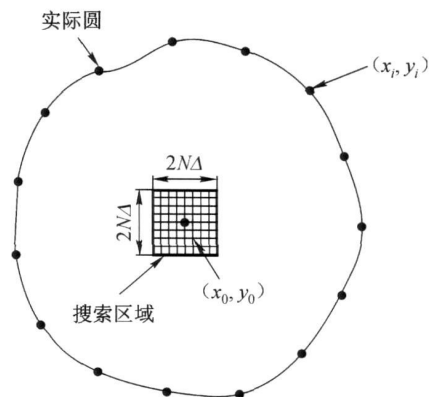


图 1 区域搜索示意图

搜索的约束条件为

$$\sum_{i=1}^n \{ \sqrt{[x_i - (x_0 + j\Delta)]^2 + [y_i - (y_0 + k\Delta)]^2} - R \}^2 \rightarrow \min$$

记满足搜索约束条件的 $j = j_0, k = k_0$, 则区域搜索法所得的理想圆的圆心坐标为 $(x_0 + j_0\Delta, y_0 + k_0\Delta)$, 为了得到高精度的搜索结果, 可以扩大搜索区域, 减小搜索步长。但应该注意的是: 无论是搜索区域的扩大, 还是搜索步长的减小都将增加计算量。最后, 得到区域搜索法的圆度误差评定结果

$$\delta = \max \{ \sqrt{[x_i - (x_0 + j_0\Delta)]^2 + [y_i - (y_0 + k_0\Delta)]^2} \} - \min \{ \sqrt{[x_i - (x_0 + j_0\Delta)]^2 + [y_i - (y_0 + k_0\Delta)]^2} \} \quad (10)$$

3 圆度误差评定的最优函数法

Matlab6.0 的优化工具箱^[4] (Optimization Toolbox)中含有一系列的优化算法函数, 可以用于解决以下工程实际问题。而用于求解无约束条件非线性极小值的函数有: $fminsearch$ 和 $fminunc$, 本文用的是 $fminunc$ 用法介绍如下:

[x, fval, exitflag, output, grad]
= fminunc (fun, x0, options)

x: 最优解; fun: 是目标函数; x0: 初始解; op-
tions: 设置优化选项参数; fval: 返回目标函数在最
优解 x 点的函数值; exitflag: 返回算法终止标志;
output: 返回优化算法信息的一个数据结构; grad:
解 x 处 fun 函数的梯度值返回到 grad 中。

设 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n, n > 3$ 为被测实际圆
周上的测量采样点。o' 为最小条件圆心, 其坐标为
 $x[x(1), x(2)]$, 令目标函数为 $F(x)$:

$$F(x) = R_{\max} - R_{\min}$$
$$= \sqrt{[x_{\max} - x(1)]^2 + [y_{\max} - x(2)]^2} -$$
$$\sqrt{[x_{\min} - x(1)]^2 + [y_{\min} - x(2)]^2}$$

(11)

式中, $R_{\max}, R_{\min}$ 为从圆心 o' 到轮廓最远和最近被
测点的半径; $(x_{\max}, y_{\max})$ 为 $R_{\max}$ 相对应的坐标;
 $(x_{\min}, y_{\min})$ 为 $R_{\min}$ 相对应的坐标。然后调用 MAT-
LAB 最优函数 fminunc 求得 $F(x)$ 的最小值 $F_{\min}$ 即
是满足最小区域的原新坐标值的圆度误差。在设定
初始值时, 我们利用 MATLAB 中数组均值函数
 $mean(X)$ 求得 x, y 的平均值, 作为初始圆心坐标。

4 测量

在 Global FX777 型三坐标测量机上对
 $\phi 63.5\text{mm}$ 的圆孔的圆度误差进行实测。为便于比
较 3 种评定方法的结果, 用三坐标对被测实际圆周
上的点进行自动数据采样时, 采样点在圆周上呈均
匀分布, 采样点数目为 50 点。测量时 z 坐标保持
不变, x、y 采样点坐标值如表 1。评定结果如表 2。

表 1 采样点数据

x (mm)	299.3951, 299.1442, 298.3971, 297.1650, 295.4685, 293.3315, 290.7932, 287.8841, 284.6582, 281.1641, 277.4580, 273.5960, 269.6423, 265.6542, 261.6981, 257.8362, 254.1322, 250.6361, 247.4145, 244.5045, 241.9633, 239.8266, 238.1293, 236.8972, 236.1522, 235.9090, 236.1521, 236.8972, 238.1293, 239.8262, 241.9633, 244.5042, 247.4124, 250.6365, 254.1366, 257.8364, 261.6987, 265.6543, 269.6444, 273.5963, 277.4587, 281.1648, 284.6582, 287.8842, 290.7923, 293.3311, 295.4683, 297.1659, 298.3974, 299.1443
y (mm)	12.1313, 16.1142, 20.0263, 23.8185, 27.4254, 30.7927, 33.8648, 36.5935, 38.9364, 40.8572, 42.3253, 43.3164, 43.8162, 43.8161, 43.3164, 42.3250, 40.8570, 38.9368, 36.5935, 33.8646, 30.7922, 27.4251, 23.8184, 20.0265, 16.1177, 12.1316, 8.1527, 4.2364, 0.4443, -3.1633, -6.5344, -9.6020, -12.3318, -14.6746, -16.5954, -18.0632, -19.0541, -19.5542, -19.5543, -19.0541, -18.0634, -16.5950, -14.6744, -12.3313, -9.6025, -6.5334, -3.1635, 0.4442, 4.2363, 8.1524

表 2 圆度误差评定结果

最小二乘法		区域搜索法		最优函数法	
圆心坐标(mm)	267.6481	圆心坐标(mm)	267.6516	圆心坐标(mm)	267.6463
	12.1312		12.1291		12.1293
评定结果(mm)	0.0117	评定结果(mm)	0.0099	评定结果(mm)	0.0104

5 结论

给出圆度误差评定的最小二乘法、最小包容区
域法和最优函数法的数学模型, 并对 3 种评定方法
的算法模型与实现方法进行比较; 在三坐标测量机
上对给定圆进行数据采集, 并用 3 种方法评定。结
果表明: 最小包容区域法评定精度最高, 最优函数法
次之, 评定结果约为最小包容区域法的 1.05 倍, 但
其算法简便、运算时间短, 值得推广, 最小二乘法评

定精度最低, 可用于精度要求不高的场合。

参考文献

[1] 王中宇, 胡新生, 施保昌, 等. 圆度误差的不可微优化算法及其
测量系统[J]. 仪器仪表学报, 1997, 18(3): 330—333
[2] 胡新生, 周济, 等. 形位误差非线性模型的统一判别准则与算法
[J]. 计量学报, 1997, 18(1): 11—16
[3] 刘永超, 陈明. 形位误差的进化算法[J]. 计量学报, 2001, 22
(1): 18—22
[4] 林雪松, 林德新, 周婧. MATLAB7.0 应用集锦[M]. 机械工业
出版社, 2005, 8: 133—166