卡诺图化简法

一、逻辑函数的卡诺图表示法

将 n 变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上也相邻地排列起来，所得到的图形称为 n 变量最小项的卡诺图。因为这种表示方法是由美国工程师卡诺(M.Karnaugh)首先提出的，所以将这种图形称为卡诺图(Karnaugh Map)。

A \ B	0	1
0	A'B' m_0	A'B m_1
1	AB' m_2	AB m_3

图 1　(a)两变量(A、B)最小项的卡诺图

A \ BC	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

图 1　(b)三变量(A、B、C)最小项的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

图 1　(c)四变量(A、B、C、D)最小项的卡诺图

以上画出了二到五变量最小项的卡诺图。图形两侧标注的 0 和 1 表示使对应小方格内的最小项为 1 的变量取值。同时，这些 0 和 1 组成的二进制数所对应的十进制数大小也就是对应的最小项的编号。

为了保证图中几何位置相邻的最小项在逻辑上也具有相邻性，这些数码不能按自然二进制数从小到大地顺序排列，而必须按图中的方式排列，以确保相邻的两个最小项仅有一个变量是不同的。

从卡诺图上还可以看到，处在任何一行或一列两端的最小项也仅有一个变量不同，所以它们也具有逻辑相邻性。因此，从几何位置上应当将卡诺图看成是上下、左右闭合的图形。

在变量数大于、等于五以后，仅仅用几何图形在两维空间的相邻性来表示逻辑相邻性已经不够了。

既然任何一个逻辑函数都能表示为若干最小项之和的形式，那么自然也就可以设法用卡诺图来表示任意一个逻辑函数。具体的方法是：首先将逻辑函数化为最小项之和的形式，然后在卡诺图上与这些最小项对应的位置上填入 1,在其余的位置上填入 0,就得到了表示该逻辑函数的卡诺图。也就是说，任何一个逻辑函数都等于它的卡诺图中填入 1 的那些最小项之和。

【例 1】用卡诺图表示逻辑函数

Y=A'B'C'D+A'BD'+ACD+AB'

解：首先将 Y 化为最小项之和的形式

Y=A'B'C'D+A'B(C+C')D'+A(B+B')CD+AB'(C+C')(D+D')

=A'B'C'D+A'BCD'+A'BC'D'+ABCD+AB'CD+AB'CD'+AB'C'D+AB'C'D'

$=m_1+m_4+m_6+m_8+m_9+m_{10}+m_{11}+m_{15}$

画出四变量最小项的卡诺图，在对应于函数式中各最小项的位置上填入 1 其余位置上填入 0,就得到如图所示的函数 Y 的卡诺图。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

【例 2】已知逻辑函数 Y 的卡诺图如下图所示，试写出该函数的逻辑式。

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

解：因为函数 Y 等于卡诺图中填入 1 的那些最小项之和，所以有

Y=AB'C'+A'B'C+ABC+A'BC'

二、用卡诺图化简逻辑函数

利用卡诺图化简逻辑函数的方法称为卡诺图化简法或图形化简法。化简时依据的基本原理就是具有相邻性的最小项可以合并，并消去不同的因子。由于在卡诺图上几何位置相邻与逻辑上的相邻性是一致的，因而从卡诺图上能直观地找出那些具有相邻性的最小项并将其合并化简。

1.合并最小项的原则

若两个最小项相邻，则可合并为一项并消去一对因子。合并后的结果中只剩下公共因子。

在图 2(a)和(b)中画出了两个最小项相邻的几种可能情况。例如，图

(a)中 $A'BC(m_3)$和 $ABC(m_7)$相邻，故可合并为

A'BC+ABC=(A'+A)BC=BC

合并后将 A 和 A'一对因子消掉了，只剩下公共因子 B 和 C。

A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	
1	1		1	1

图 2　(a)

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1

11	1	1		1
10			1	

图 2 (b)

若四个最小项相邻并排列成一个矩形组，则可合并为一项并消去两对因子。合并后的结果中只包含公共因子。

例如，在图 2(c)中，A'BC'D(m_5)、A'BCD(m_7)、ABC'D(m_{13})和 ABCD(m_{15})相邻，故可合并。合并后得到

A'BC'D+A'BCD+ABC'D+ABCD

=A'BD(C+C')+ABD(C+C')

=BD(A+A')=BD

可见，合并后消去了 A、A'和 C、C'两对因子，只剩下四个最小项的公共因子 B 和 D。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1		1	1

图 2 (c)

若八个最小项相邻并且排列成一个矩形组，则可合并为一项并消去三对因子。合并后的结果中只包含公共因子。

例如，在图 2(d)中，上边两行的八个最小项是相邻的，可将它们合并为一项 A'。其他的因子都被消去了。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			1
10	1			1

图 2 (d)

至此，可以归纳出合并最小项的一般规则，这就是：如果有 2^n 个最小项相(n=1,2,...)并排列成一个矩形组，则它们可以合并为一项，并消去 n 对因子。合并后的结果中仅包含这些最小项的公共因子。

2.卡诺图化简法的步骤

用卡诺图化简逻辑函数时可按如下步骤进行：

(1)将函数化为最小项之和的形式。

(2)画出表示该逻辑函数的卡诺图。

(3)找出可以合并的最小项。

(4)选取化简后的乘积项。选取的原则是：

①这些乘积项应包含函数式中所有的最小项(应复盖卡诺图中所有的 1)。

②所用的乘积项数目最少。也就是可合并的最小项组成的矩形组数目最少。

③每个乘积项包含的因子最少。也就是每个可合并的最小项矩形组中应包含尽量多的最小项。

【例 3】用卡诺图化简法将下式化简为最简与或函数式

$Y=AC'+A'C+BC'+B'C$

解：首先画出表示函数 Y 的卡诺图，如图 3 所示。

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

图 3　(a)

A \ BC	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1		1

图 3　(b)

事实上在填写 Y 的卡诺图时，并不一定要将 Y 化为最小项之和的形式。例如，式中的 AC'一项包含了所有含有 AC'因子的最小项，而不管另一个因子是 B 还是 B'。从另外一个角度讲，也可以理解为 AC'是 ABC'和 AB'C'两个最小项相加合并的结果。因此，在填写 Y 的卡诺图时，可以直接在卡诺图上所有对应 A=1、C=0 的空格里填入 1。按照这种方法，就可以省去将 Y 化为最小项之和这一步骤了。

其次，需要找出可以合并的最小项。将可能合并的最小项用线圈出。由图 3(a)和(b)可见，有两种可取的合并最小项的方案。如果按图 3(a)的方案合并最小项，则得到

$Y=AB'+A'C+BC'$

而按图 3(b)的方案合并最小项得到

$Y=AC'+B'C+A'B$

两个化简结果都符合最简与或式的标准。

此例说明，有时一个逻辑函数的化简结果不是唯一的。

【例 4】用卡诺图化简法将下式化为最简与或逻辑式 $Y=ABC+ABD+AC'D+C'D'+AB'C+A'CD'$

解：首先画出 Y 的卡诺图，如图 4 所示。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

图 4

然后将可能合并的最小项圈出，并按照前面所述的原则选择化简后与或式中的乘积项。由图可见，应将图中下边两行的 8 个最小项合并，同时将左、右两列最小项合并，于是得到

$Y=A+D'$

从图 4 中可以看到，A 和 D'中重复包含了 m_8、m_{10}、m_{12} 和 m_{14} 这 4 个最小项。但据 A+A=A 可知，在合并最小项的过程中允许重复使用函数式中的最小项，以利于得到更简单的化简结

果。

另外，还要补充说明一个问题。在以上的两个例子中，我们都是通过合并卡诺图中的 1 来求得化简结果的。但有时也可以通过合并卡诺图中的 0 先求出 Y'的化简结果，然后再将 Y'求反而得到 Y。