

习题 5 答案

5-1 D

5-2 B

5-3 B

5-4 C

5-5 $\frac{2}{5}\sqrt{17} \text{ m/s}^2$

5-6 $m_2 r^2 \omega_2 - m_1 R^2 \omega_1, \quad \frac{1}{2} m_1 R^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \cdot \omega_2^2$

5-7 $\frac{1}{12} m l^2 + m r^2$

解析: 在棒上取一长度元 dx , 离转轴的距离为 x , 质量为 $dm = \lambda dx$, 其中 λ 为棒的质量线密度, 根据转动惯量的定义: $J = \int r^2 dm$,

$$\text{则: } J = \int_{r-\frac{1}{2}l}^{r+\frac{1}{2}l} x^2 dm = \int_{r-\frac{1}{2}l}^{r+\frac{1}{2}l} x^2 \lambda dx = \frac{1}{12} m l^3 + l r^2$$

把棒的质量线密度用 $\lambda = \frac{m}{l}$ 代入, 得到 $J = \frac{1}{12} m l^2 + m r^2$ 。

5-8 $\frac{13}{24} m R^2$

解析: 圆盘的面密度为: $\rho = \frac{m}{\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4m}{3\pi R^2}$

原来圆盘的质量为: $M_1 = \rho S = \frac{4m}{3\pi R^2} \cdot \pi R^2 = \frac{4}{3} m$

被挖去部分的质量为: $M_2 = \rho S = \frac{4m}{3\pi R^2} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} R\right)^2 = \frac{1}{3} m$

设被挖去前大圆盘对原圆盘中心且与盘面垂直的轴的转动惯量为:

$$J_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2 = \frac{2}{3} m R^2 \dots\dots\dots ①$$

由平行轴定理得被挖去部分对圆盘中心且与盘面垂直的轴的转动惯量为:

$$J_2 = J_c + M_2 d^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} m \times \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} m \times \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} m R^2 \dots\dots\dots ②$$

则所剩部分对圆盘中心且与盘面垂直的轴的转动惯量为:

$$J = J_1 - J_2 = \frac{2}{3} m R^2 - \frac{1}{8} m R^2 = \frac{13}{24} m R^2。$$

5-9 (1) 37.9 N; (2) 63 m; (3) 185 N

解析: 记圆柱体的质量为 M , 所挂物体的质量为 m 。

(1) 根据牛顿第二定律: $mg - T = ma \dots\dots\dots ①$

根据转动定律: $TR = J\beta \dots\dots\dots ②$

又: $a = R\beta \dots\dots\dots ③$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}\text{式联立可得: } T = \frac{mg}{1 + \frac{2m}{M}} = \frac{8 \times 9.8}{1 + \frac{2 \times 8}{15}} \text{ N} = 37.9 \text{ N}$$

$$(2) \text{由运动学公式: } h = \frac{1}{2}at^2 \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$$\text{联立}\textcircled{1}\textcircled{4}\text{式可得: } h = \frac{1}{2} \frac{mg-T}{m} t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 9.8 - 37.9}{8} \times 5^2 \text{ m} = 63 \text{ m}$$

$$(3) F_N = Mg + T = 185 \text{ N}$$

5-10

解析: 两个物体被同一条绳练系着, 它们的加速度大小相同, 用 a 表示, 根据牛顿第二定律, 考虑到关系式: $\beta = r\alpha$, $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$, 对物体列出方程:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a = m_1 r \beta$$

$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a = m_2 r \beta$$

$$T'_1 r - T'_2 r = J \beta$$

$$\text{联立以上三个式子得到: } \beta = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{\left[(m_1 + m_2) r + \frac{J}{r} \right]}, \quad a = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{\left[(m_1 + m_2) + \frac{J}{r^2} \right]}$$

$$T_1 = m_1 g - \frac{m_1 (m_1 g - \mu m_2 g)}{\left[(m_1 + m_2) + \frac{J}{r^2} \right]}, \quad T_2 = \mu m_2 g - \frac{m_2 (m_1 g - \mu m_2 g)}{\left[(m_1 + m_2) + \frac{J}{r^2} \right]}$$

5-11 0.04 m/s

解析: 设下落物体的速度为 v , 则轮子的转速为 $\omega = \frac{v}{r}$, 因绳子不可伸长, 所以弹簧的伸长量即为物体

下落的距离, 选物体下落 40 cm 的位置为重力势能的零点, 即弹簧的伸长量为 $L = \frac{h}{\sin \theta}$ 。

$$\text{由机械能守恒定律: } \frac{1}{2} k L^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = m g h,$$

式中的 h 为物体下落的高度, m 为物体的质量, J 为轮子的转动惯量, 则:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh - k \frac{h^2}{\sin^2 \theta}}{m + J/r^2}} = 0.04 \text{ m/s}。$$

5-12 2.5 rad/s², 1.25 × 10⁴ J

解析: ①飞轮的圆周为: $C = \pi d$

那么飞轮转动的周数: $n = 10/\pi$

$$\text{转动角速度的平均值: } \omega_0 = \frac{2\pi n}{t} = 5 \text{ rad/s}$$

由于是从静止开始做匀角加速度运动, 所以 4s 末的角加速度为 $\omega = 2\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$

$$\text{飞轮的角加速度: } \alpha = \frac{\omega}{t} = 2.5 \text{ rad/s}。$$

$$\textcircled{2}\text{由转动定律: } M = FR = J\alpha$$

飞轮转过的角度： $\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$

拉力矩做的功： $A = M\theta = J\alpha \cdot \frac{1}{2} \alpha t^2 = 1.25 \times 10^4 \text{ J}$ 。

5-13 2.5 s

解析：取转台和落下的沙粒为系统， t 时刻，落下沙粒的质量为 $m = \lambda t$ ， $\lambda = 0.002 \text{ kg/s}$ 。

由角动量守恒： $J_0 \omega_0 = (J_0 + mr^2) \frac{1}{2} \omega_0$

$$t = \frac{J_0 \left(\omega_0 - \frac{1}{2} \omega_0 \right)}{\lambda r^2 \frac{1}{2} \omega_0} = 2.5 \text{ s}。$$

5-14

解析：设 v_1 为小球碰撞后的速度，由于弹性碰撞，碰撞后角动量和动能守恒；

所以： $m'v_0l = J\omega + m'v_1l = \frac{1}{3}ml^2\omega + m'v_1l$

化简得： $v_0 - v_1 = \frac{ml\omega}{3m'}$ ①

又因为： $\frac{1}{2}m'v_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}ml^2 \right) \omega^2 + \frac{1}{2}m'v_1^2$

化简得： $v_0^2 - v_1^2 = \frac{ml^2\omega^2}{3m'}$ ②

②式÷①式得： $v_0 + v_1 = l\omega$ ③

①+③式得： $v_0 = \frac{1}{2}l\omega \left(1 + \frac{m}{3m'} \right)$ ④

碰撞后，由于无外力作用，棒的机械能守恒，所以： $\frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mgl(1 - \cos \theta)$ ， $J = \frac{1}{3}ml^2$

所以： $\omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \theta)}{l}}$ ， $\theta = 60^\circ$ ⑤

联立④⑤两式得： $v_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{3m'} \right) \sqrt{3gl(1 - \cos 60^\circ)}$ 。