习题 6 答案

6-1　B

6-2　B

6-3　C

6-4　C

6-5　A

6-6　不变；不变；增大 4 倍；增大 2 倍；增大 2 倍

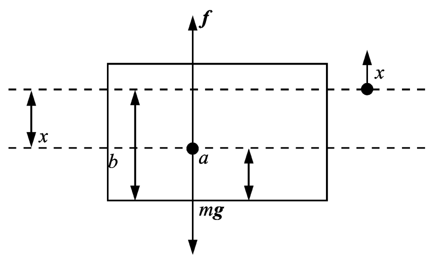
6-7　$\nu=\sqrt{2}\nu_0$

6-8　$x=A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{3}{2}\pi\right)$；$x=A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$；$x=A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t+\pi\right)$

6-9　$x=A\cos\left(\omega t+\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)$；$x=A\cos\left(\omega t+\varphi-\dfrac{3}{2}\pi\right)$

6-10　$2\pi\sqrt{\dfrac{x_1^2-x_2^2}{v_2^2-v_1^2}}$

6-11



解析：如图所示，设木块质量为 m，底面积为 S，水密度为 $\rho_水$，木块受到重力 $m\boldsymbol{g}$ 和浮力 $\boldsymbol{f}$ 平衡时，$mg=f=\rho_水 gSa$，以水面上某点为原点，向上为 x 轴建立坐标系则当木块在图示位置时，合力为

$$F=f=mg=\rho_水 gS|b|-\rho_水 gS|a|=-\rho_水 gSx$$

由牛顿第二定律

$$F=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-\rho_水 gSx$$

故

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\rho_水 gSx}{m}x=0$$

可见，木块作简谐振动，振幅为 $b-a$，$\omega_0=\sqrt{\rho_水 gS/m}$，

所以振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{m/\rho_水 gS}=2\pi\sqrt{a/g}$$

6-12

解析：(1) 以振动物体的平衡位置为坐标原点，建立 Ox 坐标系。设 t 时刻砝码位于 x 处，由牛顿第二定律，得

$$mg-k(x+x_0)=m\frac{d^2x}{dt^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

①式中 x_0 为砝码处于平衡时弹簧的伸长量，有

$mg=kx_0$ ……………………………………………………………… ②

②式代入①式，化简，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

因此，砝码的运动为简谐运动。

(2)砝码振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{g}{x_0}}=\sqrt{\frac{9.8}{0.1}}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}=9.9\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

频率为

$$v=\frac{\omega}{2\pi}=1.58\ \text{Hz}$$

设砝码的谐振动方程为

$$x=A\cos(\omega t+\alpha)$$

则速度公式为

$$v=-A\sin(\omega t+\alpha)$$

由初始条件，$t=0$ 时，$x=-x_0=-0.1$ m，$v=0$

代入公式，解得

$$A=0.1,\ \alpha=\pi$$

即振幅为 0.1 m，角频率为 9.9 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$，频率为 1.58 Hz

(3)由(1)(2)得简谐振动的振动方程为

$$x=0.1\cos(9.9t+\pi)\ \text{m}$$

6-13

解析：设 $x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$，已知振幅 $A=10$ cm，故

$$x=10\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

$$v=-10\omega_0\sin(\omega_0+\varphi)$$

所以

$$\frac{x^2}{100}+\frac{v^2}{100\omega_0{}^2}=1$$

(1)当 $x=6$ cm。$v=24$ cm/s 时，角频率为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{v^2}{100-x^2}}=\sqrt{\frac{24^2}{100-6^2}}=3\ \text{rad/s}$$

所以周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\times3.14}{3}=2.09\ \text{s}$$

(2)当 $v=\pm12$ cm/s 时，位移为

$$x=\pm\sqrt{100-\frac{v^2}{\omega_0^2}}=\pm\sqrt{100-\frac{12^2}{3^2}}=\pm9.17\ \text{cm}$$

6-14

解析：(1)由题可知，弹簧系数

$$k=\frac{60}{0.3}=200\ \text{N/m}$$

所以，角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=5\sqrt{2}$$

因此周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{5}=0.89\ \text{s}$$

(2)设向下为正方向，$x=-5$ cm，所以加速度

$$a=\frac{mg-f}{m}=\frac{mg-k(\Delta x+x)}{m}=\frac{-kx}{m}=2.5\ \text{m/s}^2$$

结果为正，所以加速度方向向下。

由 $F=k\Delta x=k(x_0+x)$，$x_0=\frac{mg}{k}=\frac{4\times 9.8}{200}=0.196$ m

可得拉力为

$$F=200\times(0.196-0.05)=29.2\ \text{N}$$

(3)由题可知 $k=200$ N/m，$A=0.1$ m，$\omega=5\sqrt{2}=7.07$ rad/s，

设振动方程为 $x=0.1\cos(7.07t+\varphi)$，，当 $t=0$ 时，$x=0.1$，代入公式，得

$$0.1=0.1\cos\varphi$$

解得 $\varphi=0$，所以振动方程为

$$x=0.1\cos(7.07t)$$

设第一次越过平衡时刻为 t_1，则

$$0=0.1\cos(7.07t_1)$$

解得

$$t_1=0.5\pi/7.07$$

设第一次运动到上方 5 cm 处时刻为 t_2，则

$$-0.05=0.1\cos(7.07t_2)$$

解得

$$t_2=2\pi/(3\times 7.07)$$

故所需最短时间为

$$\Delta t=t_2-t_1=0.074s$$

(4)设小物块随振动物体的加速度为 a，受力分析得 $mg-N=ma$，所以

$$N=m(g-a)$$

当 $N=0$ 时，即 $a=g$ 时，小物块开始脱离振动物体，$A=0.1$ m，$\omega=7.07$ rad/s

系统最大加速度为

$$a_{\max}=\omega^2A=5\ \text{m}\cdot s^2<g$$

故小物体不会离开。

(5)开始分离时，$N=0$，$\text{g}=a_{\max}=-\omega^2x$

$$x=-\frac{g}{\omega^2}=-19.6\ \text{cm}$$

即小物体在 19.6 cm 时与振动物体开始分离。

6-15

解析： 由题可知，频率 $f=\frac{10}{\pi}$，所以角频率为

$$\omega=2\pi f=20\ \text{rad}\cdot\text{s}$$

开始离开时 $N=0$，$g=a_{\max}=-\omega^2 x$，所以

$$x=-\frac{g}{\omega^2}=-2.45\ \mathrm{cm}$$

即木块在 2.45 cm 处离开平台。

6-16

解析：当物块位移大小为振幅的一半时，简谐振动的总能量为

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$$

其中势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2=\frac{E}{4}$，动能 $E_k=E-E_p=\frac{E}{3}$，

因而势能占总能量的 25%；动能占总能量的 75%。

设物体在 x 处物体动能和势能相等即 $E_p=E_k$，所以

$$E_k=E-E_p$$

解得

$$E_p=\frac{1}{2}E$$

即

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2$$

解得

$$x=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

6-17

解析：由题可知，$A_1=1$，$A_2=\sqrt{3}$，$\varphi_1=0$，$\varphi_2=\frac{\pi}{2}$

所以同一直线上两个同频率的谐振动的合成，振幅

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)=2}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\sqrt{3}$$

初相位 $\varphi=\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$

6-18

解析：利用旋转矢量法，$|\Delta\varphi|=\frac{2}{3}\pi$

6-19

解析：由题可知，$A_1=5$，$A_2=6$，$\varphi_1=\frac{3}{4}\pi$，$\varphi_2=\frac{\pi}{4}$

同一直线上两个同频率的谐振动的合成：

振幅

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=\sqrt{61}\ \mathrm{cm}=7.81\ \mathrm{cm}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=11$$

得初相位

$$\varphi=1.48\mathrm{rad}$$

6-20

解析：由题可知，$A_1=0.12$，$A_2=0.15$，$\varphi_1=\frac{1}{3}$，$\varphi_2=\frac{1}{6}$

同一直线上两个同频率的谐振动的合成：

振幅

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}=0.27\ \mathrm{cm}$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=0.25$$

初相位

$$\varphi\approx\frac{\pi}{4}+4\pi$$

所以合成运动的振动方程

$$x=0.27\cos\pi\left(t+\frac{1}{4}\right)$$