



湖南三一工业职业技术学院
HUNAN SANY POLYTECHNIC COLLEGE

第二章 正弦交流电路及其应用





第二节 单一元件的正弦交流电路

重点内容:

纯电阻元件交流电路分析

纯电容元件交流电路分析

纯电感元件交流电路分析

难点内容:

单一元件的正弦交流电路的电压和电流的关系



新课导入:

- 交流电路与直流电路对电阻、电感或电容的作用结果都不同。
- 电容对直流电路相当于开路；电感对直流电路相当于短路。
- 而在交流电路中电容有充放电现象存在，有电流通过电感有自感电动势出现而阻碍电流变化。



新课导入:

最简单的交流电路是由电阻、电感、电容单个电路元件组成的。

单一参数电路元件的交流电路：电路元件仅由R、L、C三个参数中的一个来表征其特性。

复杂的交流电路也可以认为是由单一参数电路元件组合而成的。



电阻元件的正弦交流电路

概念：仅有电阻参数的交流电路

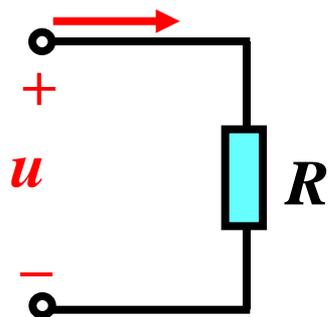
根据欧姆定律： $i = \frac{u}{R}$ 或 $u = iR$

即电阻端电压与其电流成正比。

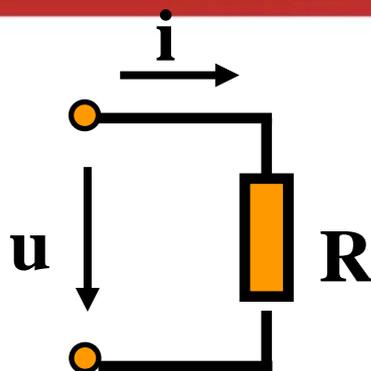
若设 $i = I_m \sin \omega t$

则 $u = RI_m \sin \omega t = U_m \sin \omega t$

显然 $U_m = RI_m$ 或 $U = RI$



如果用相量表示，则有



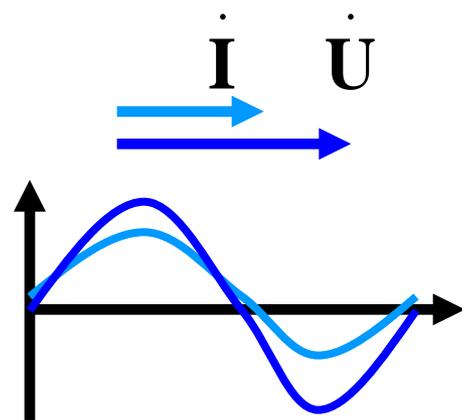
$$i = I_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_m = I_m \underline{/0^\circ} \quad \text{或} \quad \dot{I} = I \underline{/0^\circ}$$

$$u = U_m \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_m = U_m \underline{/0^\circ} \quad \text{或} \quad \dot{U} = U \underline{/0^\circ}$$

$$\text{且} \quad \dot{U}_m = R \dot{I}_m \quad \text{或} \quad \dot{U} = R \dot{I}$$

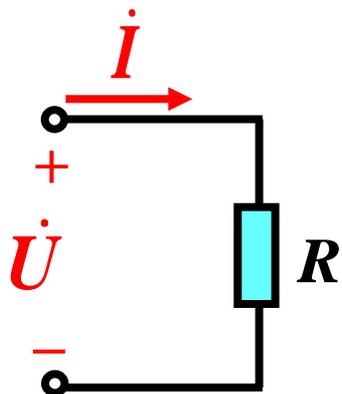
相量形式的欧姆定律。也可写成：

$$\dot{I}_m = \frac{U_m}{R} \quad \text{或} \quad \dot{I} = \frac{U}{R}$$





$$i = I_m \sin \omega t = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

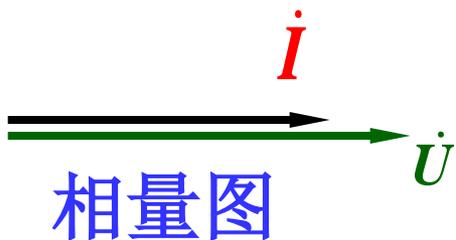


① 频率相同

② 大小关系: $I = \frac{U}{R}$

③ 相位关系: u 、 i 相位相同

相位差 φ : $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$



相量式:

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ$$

$$\dot{U} = U \angle 0^\circ = \dot{I}R$$

电阻电路中的功率

1. 瞬时功率 p : 瞬时电压与瞬时电流的乘积

小写

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2} U \sin \omega t$$

$$p = u \cdot i$$

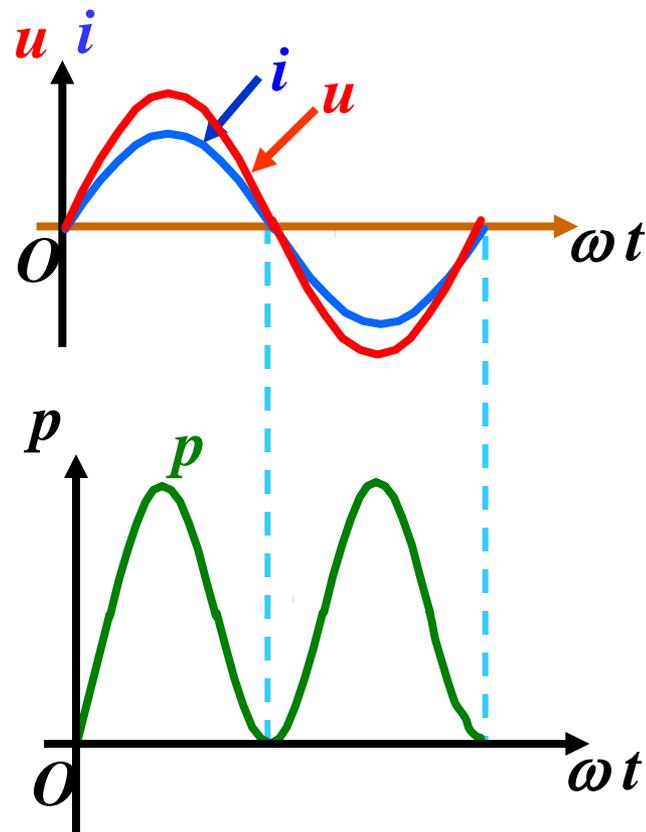
$$= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t$$

$$= \sqrt{2} U \cdot \sqrt{2} I \sin^2 \omega t$$

$$= \underline{UI} (1 - \underline{\cos 2\omega t})$$

直流分量

2倍频交流分量



结论: $p \geq 0$ (耗能元件), 且随时间变化。



2. 平均功率（有功功率） P

瞬时功率在一个周期内的平均值

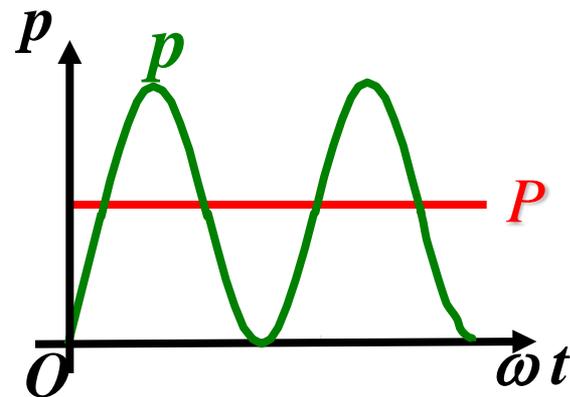
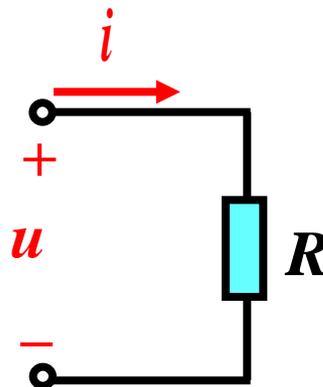
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T UI(1 - \cos 2\omega t) \, dt$$

$$= UI$$

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

单位:瓦(W)

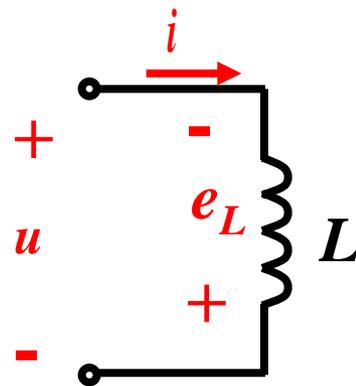


注意：通常铭牌数据或测量的功率均指有功功率。



电感元件的正弦交流电路

$$\text{关联参考方向时, } u = -e_L = L \frac{di}{dt}$$



电感元件

(一) 正弦电压与电流的关系

$$\text{设: } i = I_m \sin \omega t$$

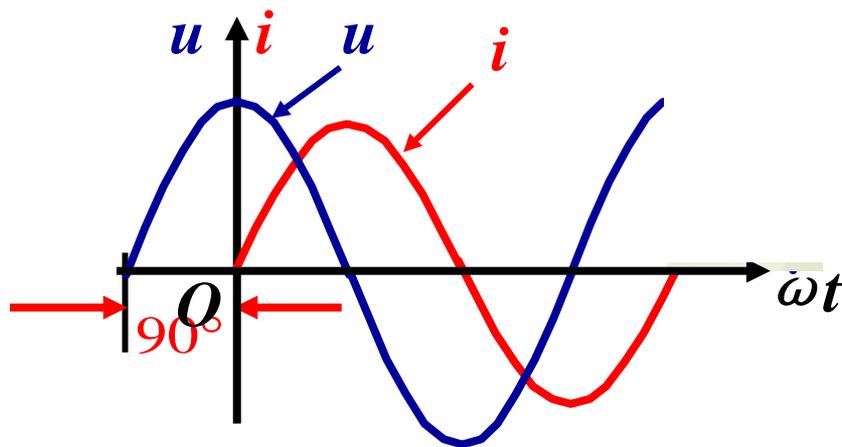
$$u = L \frac{d(I_m \sin \omega t)}{dt}$$

$$= \underline{\omega L I_m} \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$= \underline{U_m} \sin(\omega t + 90^\circ)$$



$$\begin{cases} i = I_m \sin \omega t \\ u = \omega L I_m \sin (\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$



- ① 频率相同
- ② 有效值: $U = I\omega L$
- ③ 电压超前电流 90°

相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$



感抗：即电感的电抗，起阻碍电流通过的作用

有效值： $U = I \cdot \omega L$ 或 $I = \frac{U}{\omega L}$

定义： $X_L = \omega L = 2\pi fL$ 感抗(Ω)

则： $U = I X_L$ 有效值符合欧姆定律

$$X_L = 2\pi fL \left\{ \begin{array}{l} \text{直流: } f = 0, X_L = 0, \text{ 电感 } L \text{ 视为短路} \\ \text{交流: } f \uparrow \quad X_L \uparrow \end{array} \right.$$

感抗大小与频率成正比，电感L具有通直阻交的作用



相量式表达式

根据:
$$\begin{cases} i = I_m \sin \omega t \\ u = \omega L I_m \cdot \sin (\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

$$\dot{I} = I \angle 0^\circ$$

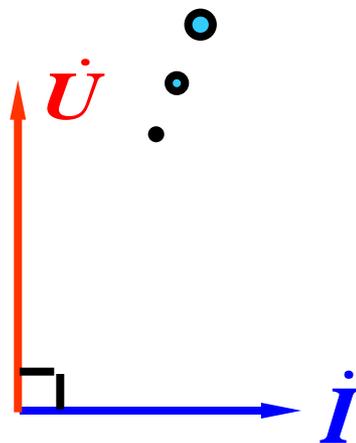
$$\dot{U} = U \angle 90^\circ = I \omega L \angle 90^\circ$$

则:
$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} \angle 90^\circ = j \omega L$$

$$\dot{U} = j \omega L \dot{I} = j X_L \dot{I}$$

电感电路复数形式的欧姆定律

\dot{U} 超前 i 90°



相量图



(二) 电感电路中的功率

1. 瞬时功率

$$\begin{cases} i = I_m \sin \omega t \\ u = \omega L I_m \cdot \sin (\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

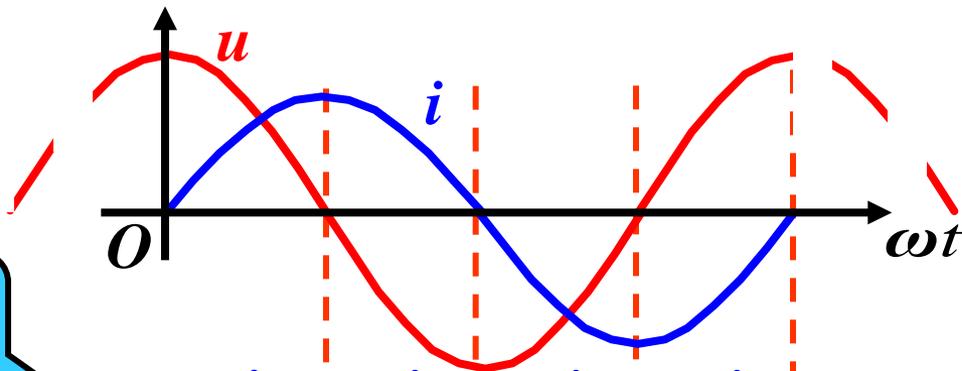
$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin \omega t \sin (\omega t + 90^\circ) \\ &= U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \\ &= UI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

2. 平均功率 (有功功率)

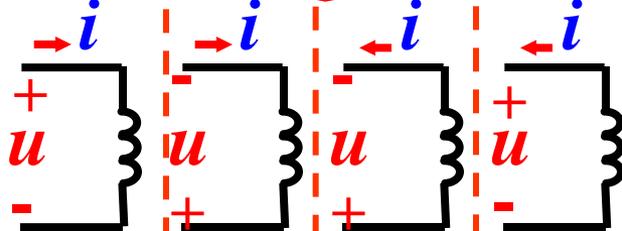
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin (2\omega t) dt = 0 \end{aligned}$$

L是非耗能
元件

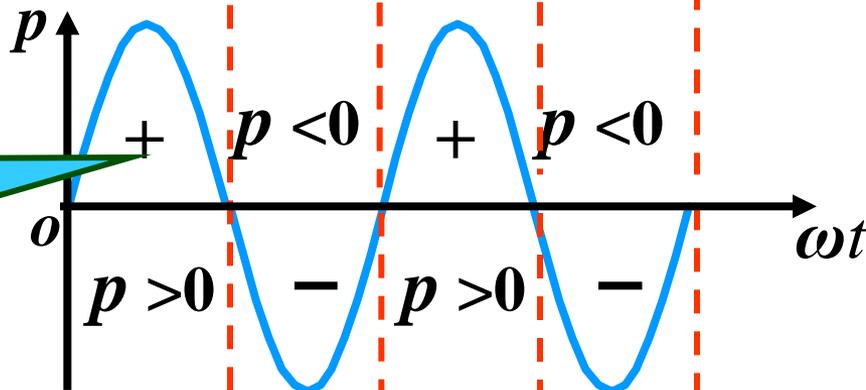
分析： 瞬时功率 $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



看 u 、 i 的极性



可逆的能量转换过程



储能 放能 储能 放能

结论：
纯电感不消耗能量，只和电源进行能量交换

结论：
电感是储能元件



3. 无功功率 Q_L

用以衡量电感电路中能量交换的规模。

用瞬时功率达到的最大值表征，为瞬时功率的幅值。

瞬时功率： $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$

$$Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$$

单位：乏(var)



(1) 已知 $i = 7\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$, 求电压 u ;

(2) 已知 $\dot{U} = 127 \angle -30^\circ \text{ V}$, 求电流 i 。

其中, $L=100\text{mH}$, $f=50\text{Hz}$, 并画相量图。

解: (1) 由题知感抗为 $X_L = \omega L = 2\pi \times 50 \times 0.1 = 31.4\Omega$

则由相量形式的欧姆定律知:

$$\dot{U} = j\omega L \dot{I} = 1 \angle 90^\circ \times 31.4 \times 7 \angle 0^\circ = 220 \angle 90^\circ \text{ V}$$

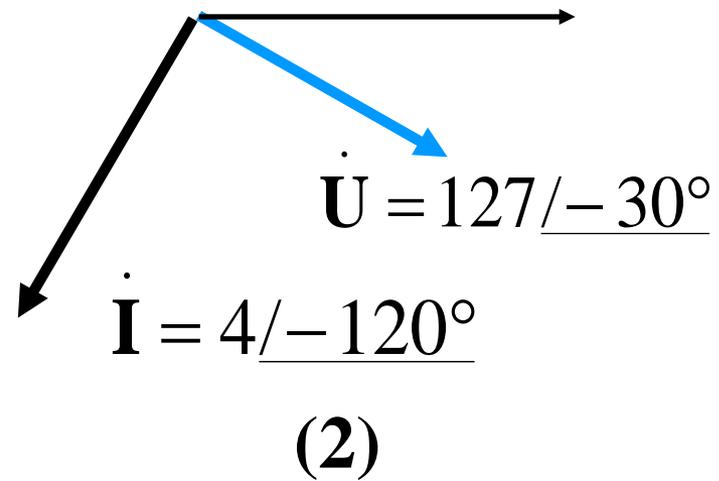
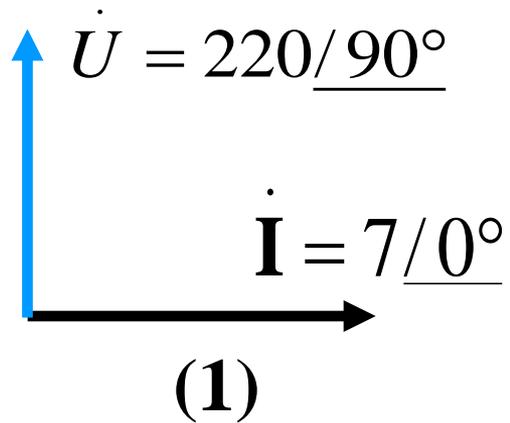
$$\therefore u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ V}$$

$$(2) \text{ 电流为 } \dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L} = \frac{127 \angle -30^\circ}{31.4 \angle 90^\circ} = 4 \angle -120^\circ \text{ A}$$

$$i = 4\sqrt{2} \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ A}$$



相量图分别为：





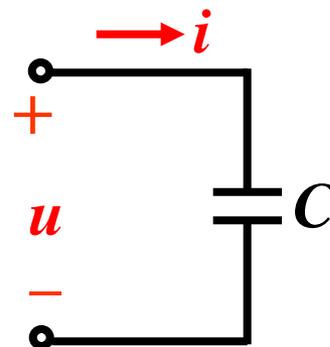
三、电容电路

关联参考方向时, $i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{du}{dt}$

(一) 正弦电压与电流的关系

设: $u = U_m \sin \omega t$

则: $i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t$
 $= \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$
 $= I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$

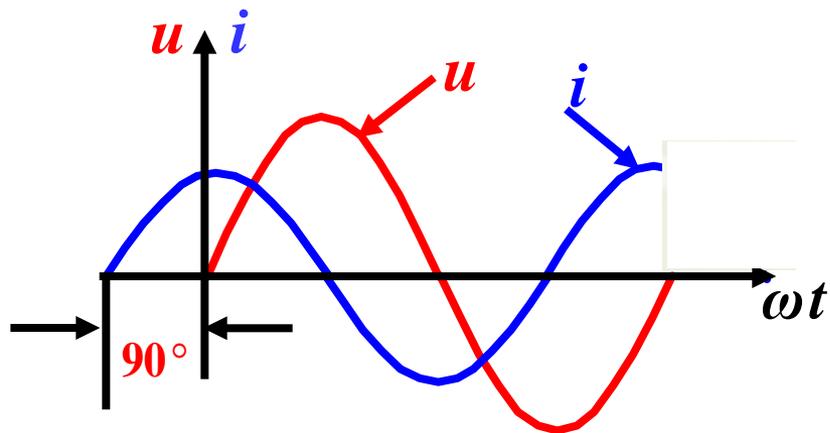


电容元件

电流与电
压的变化率
成正比



$$\begin{cases} u = U_m \sin \omega t \\ i = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$



- ① 频率相同
- ② 有效值 $I = U\omega C$
- ③ 电流超前电压 90°

相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$



容抗：即电容的电抗，起阻碍电流通过的作用

有效值： $I = U \cdot \omega C$ 或 $U = \frac{1}{\omega C} I$

定义： $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$ 容抗 (Ω)

则： $U = I X_C$ 有效值符合欧姆定律

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} \begin{cases} \text{直流: } X_C \rightarrow \infty, \text{ 电容 } C \text{ 视为开路} \\ \text{交流: } f \uparrow \quad X_C \downarrow \end{cases}$$

所以电容C具有隔直通交的作用



相量式表达式

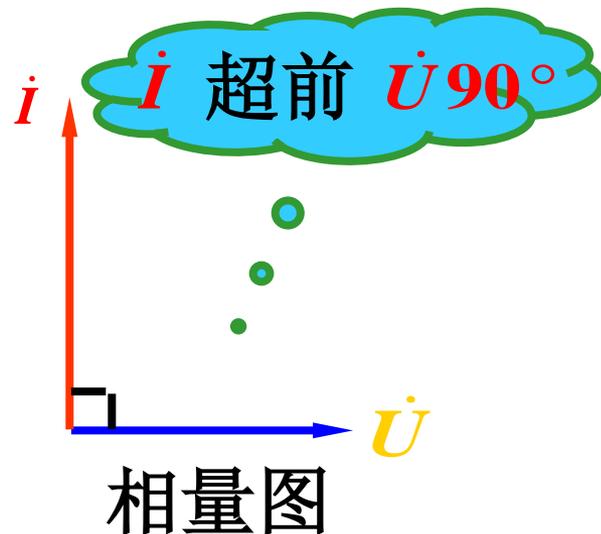
$$\text{由} \begin{cases} u = U_m \sin \omega t \\ i = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

$$\dot{U} = U \angle 0^\circ$$

$$\dot{I} = I \angle 90^\circ = jU\omega C$$

则:

$$\dot{U} = -j\dot{I} \frac{1}{\omega C} = \underline{-j\dot{I} X_C}$$



电容电路中复数形式的欧姆定律



(二) 电容电路中的功率

1. 瞬时功率

$$\begin{cases} u = U_m \sin \omega t \\ i = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ) \end{cases}$$

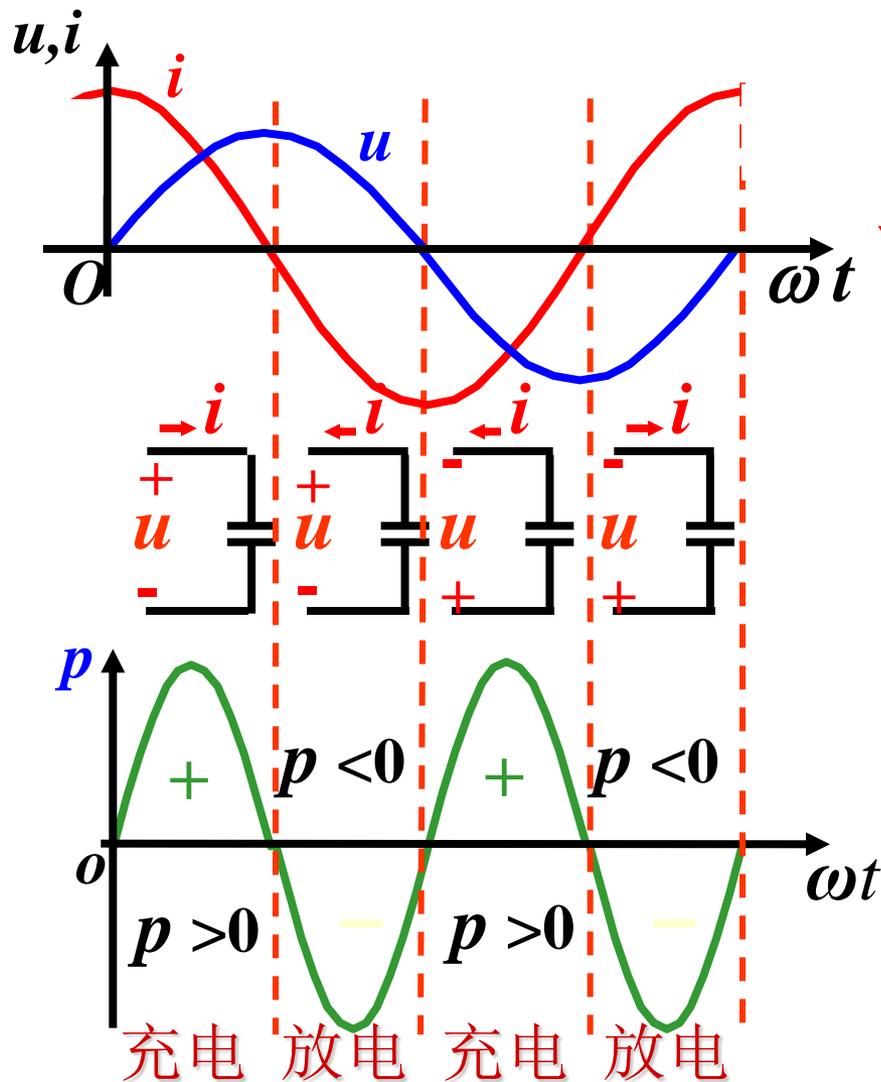
$$\begin{aligned} p &= i \cdot u = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + 90^\circ) \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t \end{aligned}$$

2. 平均功率 P

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin(2\omega t) \, dt = 0 \end{aligned}$$

C是非耗能元件

瞬时功率 $p = i \cdot u = UI \sin 2\omega t$



结论:

纯电容不消耗能量，只和电源进行能量交换（能量的吞吐）

所以电容C是储能元件



3. 无功功率 Q_C

为了同电感电路的无功功率相比较，这里也设

$$u = U_m \sin \omega t$$

则： $i = I_m \sin (\omega t + 90^\circ)$

所以 $p = UI \sin 2\omega t$

同理，无功功率等于瞬时功率达到的最大值。

$$Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C}$$

单位：乏 (var)



如图电容交流电路, $C=4\mu\text{F}$, $f=50\text{Hz}$,

(1) 当 $u = 220\sqrt{2}\sin\omega t \text{ V}$, 求电流 i ;

(2) 当 $\dot{I} = 0.1\angle -60^\circ \text{ A}$ 时, 求电压 \dot{U} , 并画相量图。

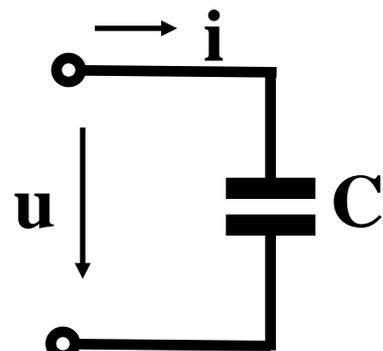
解:
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 4 \times 10^{-6}} = 796\Omega$$

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C \cdot 220\sqrt{2} \cos\omega t = 0.276\sqrt{2} \cos\omega t$$

$$= 276\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ) \text{ mA}$$

其相量式为
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = 276\angle 90^\circ \text{ mA}$$

即电流的有效值为276mA, 其相位比电压超前 90°





归纳

电阻元件的交流电路

1. 电压与电流的数量关系

瞬时值、有效值、最大值均符合欧姆定律

$$u = iR \quad U_m = RI_m \quad U = RI$$

2. 电压与电流的相位关系

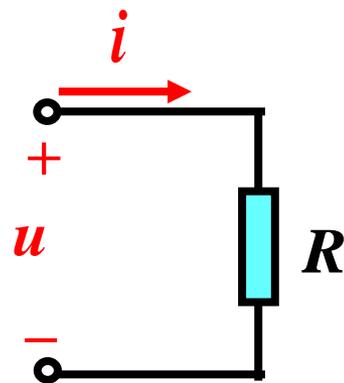
u 、 i 相位相同

相位差 φ : $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$

3. 功率关系 (耗能元件)

平均功率(有功功率)

$$P = U \times I = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad \text{单位:瓦 (W)}$$





归纳

电感元件的交流电路

1. 电压与电流的数量关系

有效值、最大值符合欧姆定律（瞬时值不符合）

$$U = I X_L$$

$$\dot{U} = j\dot{I} \omega L = \dot{I} \cdot (jX_L)$$

感抗

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

通低频阻高频

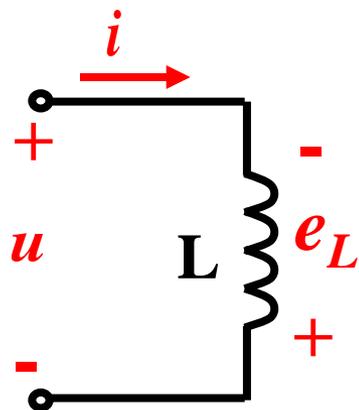
2. 电压与电流的相位关系

电压超前电流 90° 相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$

3. 功率关系（储能元件）

平均功率(有功功率) $P=0$ （不消耗能量）

无功功率 Q_L : $Q_L = UI = I^2 X_L = \frac{U^2}{X_L}$





归纳

电容元件的交流电路

1. 电压与电流的数量关系

有效值、最大值符合欧姆定律（瞬时值不符合）

$$U = I X_C$$

$$\dot{U} = -jI \frac{1}{\omega C} = -jIX_C$$

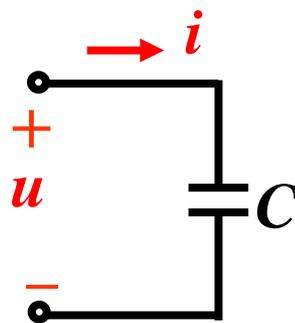
容抗

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

隔直通交

2. 电压与电流的相位关系

电压滞后电流 90° 相位差 $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$



3. 功率关系（储能元件）

平均功率(有功功率) $P=0$ （不消耗能量）

无功功率 Q_C : $Q_C = UI = I^2 X_C = \frac{U^2}{X_C}$

归纳

电阻元件的交流电路

1. 电压与电流的数量关系

瞬时值、有效值、最大值均符合欧姆定律

$$u = iR \quad U_m = RI_m \quad U = RI$$

2. 电压与电流的相位关系

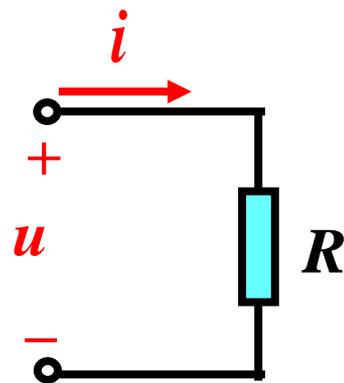
u 、 i 相位相同

相位差 φ : $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$

3. 功率关系 (耗能元件)

平均功率(有功功率)

$$P = U \times I = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad \text{单位:瓦 (W)}$$





小结

单一参数电路中的基本关系

参数	阻抗	基本关系	相量式	相量图
R	R	$u = iR$	$\dot{U} = \dot{I}R$	
L	$jX_L = j\omega L$	$u = L \frac{di}{dt}$	$\dot{U} = jX_L \dot{I}$	
C	$-jX_C = -j \frac{1}{\omega C}$	$i = C \frac{du}{dt}$	$\dot{U} = -jX_C \dot{I}$	



湖南三一工业职业技术学院
HUNAN SANY POLYTECHNIC COLLEGE

品质改变世界

谢谢大家