

18 世纪，蒲丰提出以下问题：设我们有一个以平行且等距木纹铺成的地板（如下图），随意抛一支长度比木纹之间距离小的针，求针和其中一条木纹相交的概率。并以此概率，蒲丰提出的一种计算圆周率的方法——随机投针法。这就是蒲丰投针问题。

蒲丰投针实验是第一个用几何形式表达概率问题的例子，他首次使用随机实验处理确定性数学问题，为概率论的发展起到一定的推动作用。



这一方法的步骤是：

- 1) 取一张白纸，在上面画上许多条间距为 a 的平行线。
- 2) 取一根长度为 l ($l < a$) 的针，随机地向画有平行直线的纸上掷 n 次，观察针与直线相交的次数，记为 m 。
- 3) 计算针与直线相交的概率。

18 世纪，法国数学家蒲丰提出的“投针问题”，记载于蒲丰 1777 年出版的著作中：“在平面上画有一组间距为 a 的平行线，将一根长度为 l ($l < a$) 的针任意掷在这个平面上，求此针与平行线中任一条相交的概率。”

蒲丰本人证明了，这个概率是：

$$p = \frac{2l}{\pi a}$$

由于它与 π 有关，于是人们想到利用投针试验来估计圆周率的值。

蒲丰惊奇地发现：有利的扔出与不利的扔出两者次数的比，是一个包含 π 的表示式。如果针的长度等于 $a/2$ ，那么扔出的概率为 $1/\pi$ 。扔的次数越多，由此能求出越为精确的 π 的值。

下面是其证明：

由于向桌面投针是随机的，所以用二维随机变量 (X, Y) 来确定它在桌上的具体位置。

设 X 表示针的中点到平行线的距离, Y 表示针与平行线的夹角, 如果 $X < \frac{l}{2} \sin Y$ 时, 针与直线相交。

并且 X 在 $(0, \frac{a}{2})$ 服从均匀分布, Y 在 $(0, \pi)$ 服从均匀分布, XY 相互独立, 由此可以写出 (X, Y) 的概率密度函数:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a}, & 0 < x < \frac{a}{2}, 0 < y < \pi \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{因此所求概率 } P\left\{X < \frac{l}{2} \sin Y\right\} = \iint_{X < \frac{l}{2} \sin Y} f(x, y) dx dy = \int_0^\pi \int_0^{\frac{l}{2} \sin y} \frac{2}{\pi a} dx dy = \frac{2l}{\pi a}。$$