单因子方差分析的非参数方法

上面介绍的方差分析也称为参数有差分析，当正态性和方差齐性的假定得到满足时，上述方法会得到较好的结果。但当这些假定得不到满足时，参数方差分析可能会失效。这时可采用其他检验方法，比如非参数方差分析方法。

Kruskal Wallis 检验是由 Wilian H. Kruskal 和 W. AllenWallis 于 1952 年提出的，它是用于检验多个总体是否相同的一种非参数检验方法。由于该检验事先不需要对总体做出任何假定，因此，当方差分析的假设不能满足时，可使用 Kruskal Wallis 检验作为单因子方差分析的替代方法。该检验可用于顺序数据，也可用于数值数据。

设有 I 个总体(处理)，要研究 I 个总体是否相同，可提出如下假设：

$$H_0: \text{所有总体都相同}$$
$$H_1: \text{并非所有总体都相同}$$

如果在研究总体是否相同时侧重于考察位置参数，比如中位数，上述假设等价于 I 个总体的中位数都相等。设 I 个总体的中位数分别为 $M_1, M_2, \ldots, M_I$，上述假设可以写为：

$$H_0: M_1 = M_2 = \ldots = M_I$$
$$H_1: M_1, M_2, \ldots, M_I \text{不全相同}$$

为检验上述假设，从每个总体中抽出一个样本，共有 I 个独立样本，各样本的样本量分别为 $n_1, \ldots, n_I$。将所有样本数据合并成一个单一的样本，则全部观察值的总数为 $N = n_1 + \ldots + n_I$。按从小到大的顺序排列样本值，可以找出每个观察值的秩。从 1 到 N，对于 N 个观察值来说，平均的秩为 $\frac{1+2+\ldots+N}{N} = (N+1)/2$。

对于含有 n_i 个观察值的第 i 个样本来说，设实际的秩的总和为 R_i，秩的总和的期望值应为 $n_i(N+1)/2$，那么第 i 个样本实际秩和与期望秩和的差值为 $R_i - n_i(N+1)/2$。如果 H_0 为真，对于所有观察值混合成的一个随机样本来说，秩的次序应该在 I 个样本之间均匀分布，也就是说，$R_i - n_i(N+1)/2$ 的值应该很小，否则，应怀疑 H_0。

Kruskal-Wallis 检验的具体步骤为：

第 1 步：将所有样本的观察值混合在一起，找出每个观察值在 N 个数据中的秩。

第 2 步：计算检验统计 Kruskal Wallis 检验的统计量是建立在实际秩和与期望秩和差值

$R_i - {n_i(N+1)}/{2}$ 的基础上，计算公式为：

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{I}\frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \qquad (7\text{-}18)$$

第 3 步：计算出统计量的 P 值并做出决策。当每个样本的样本量均大于等于 5 时，统计量 H 的抽样分布近似自由度为$k-1$的χ^2分布。若$P \le \alpha$，则拒绝H_0，表示 I 个总体不全相同。

例 7.1 续 （4）检验小麦品种对产量的影响是否显著($\alpha = 0.05$)。

解：首先提出假设：

$$H_0: 3\text{个品种的产量相同}$$
$$H_1: 3\text{个品种的产量不全相同}$$

Kruskal-Wallis 检验的 R 代码和结果如下文本框所示：

```
> attach(example1_2)
> kruskal.test(产量~品种)


        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  产量 by 品种

Kruskal-Wallis chi-squared = 13.532, df = 2, p-value = 0.001152
```

文本框给出的统计量$H = 13.532$，$P = 0.001152$，拒绝H_0，表示三个品种的产量之间有显著差异。