

一、简单指数平滑

$$\tilde{x}_t = \alpha x_t + \alpha(1 - \alpha)x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-2} + \dots$$

式中， $\tilde{x}_t$ 称为是 t 时刻的拟合值，又称平滑项。 α 为平滑系数，它满足 $0 < \alpha < 1$ 。

$$\text{因为 } \tilde{x}_{t-1} = \alpha x_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)x_{t-2} + \alpha(1 - \alpha)^2 x_{t-3} + \dots$$

所以 $\tilde{x}_t$ 又等价于

$$\tilde{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)\tilde{x}_{t-1}$$

二、Holt 两参数指数平滑

Holt 两参数指数平滑适用于对含有线性趋势的序列进行修匀。它的基本思想是假定序列有一个比较固定的线性趋势——每期都递增 r 或递减 r ，那么第 t 期的估计值就应该等于第 $t-1$ 期的观察值加上每期固定的趋势变动值，即

$$\hat{x}_t = x_{t-1} + r$$

但是由于随机因素的影响，每期的递增或递减值不会恒定为 r ，它会随时间变化上下波动，所以趋势序列实际上是一个随机序列 $\{r_t\}$ ，因而

$$\hat{x}_t = x_{t-1} + r_{t-1}$$

考虑用第 t 期的观察值和第 t 期的估计值的加权平均数作为第 t 期的修匀值：

$$\tilde{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)\hat{x}_t,$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(x_{t-1} + r_{t-1}), 0 < \alpha < 1$$

因为趋势序列 $\{r_t\}$ 也是一个随机序列，为了使修匀序列 $\{\tilde{x}_t\}$ 更平滑，我们对 $\{r_t\}$ 也进行一次修匀处理：

$$r_t = \beta(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) + (1 - \beta)r_{t-1}, 0 < \beta < 1$$

由上两式可以得到比较光滑的修匀序列 $\{\tilde{x}_t\}$ 。这就是 Holt 两参数指数平滑法的构造思想，它的平滑公式为：

$$\begin{cases} \tilde{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(\tilde{x}_{t-1} + r_{t-1}) \\ r_t = \beta(\tilde{x}_t - \tilde{x}_{t-1}) + (1 - \beta)r_{t-1} \end{cases}$$

式中， α ， β 为两个平滑系数，也称平滑参数，它们满足 $0 < \alpha, \beta < 1$ 。

三、Holt-Winters 三参数指数平滑

假设要进行指数平滑的序列为 $\{x_t\}$ ， $\{x_t\}$ 序列既含有趋势又含有季节。不妨记 a_t 为该序列的水平部分， b_t 为该序列的趋势部分， s_t 为该序列的季节因子（假设一个季节周期长度为 π ），这个季节因子可以随着每年的具体情况波动。因为引入了季节因子，所以 Winters1960 年在 Holt 两参数指数平滑的基础上构造了 Holt-Winters 三参数指数平滑模型。

如果季节和趋势是加法模型，则 Holt-Winters 三参数指数平滑模型的构造如下：

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha(x_t - s_{t-\pi}) + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\b_t &= \beta(a_t - a_{t-\pi}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\s_t &= \gamma(x_t - a_t) + (1 - \gamma)s_{t-\pi}\end{aligned}$$

如果季节和趋势是乘法模型，则 Holt-Winters 三参数指数平滑模型的构造如下：

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha(x_t/s_{t-\pi}) + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\b_t &= \beta(a_t - a_{t-\pi}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\s_t &= \gamma(x_t/a_t) + (1 - \gamma)s_{t-\pi}\end{aligned}$$

例 9.10 对 1964-1999 年中国沙年产量序列进行 Holt 两参数指数平滑，并预测未来 10 年的中国沙产量。其数据如表 9-10 所示。

表 9-10 1964-1999 年中国沙年产量

年份	沙产量	年份	沙产量
1964	97	1982	335.4
1965	130	1983	327
1966	156.5	1984	321.9
1967	135.2	1985	353.5
1968	137.7	1986	397.8
1969	180.5	1987	436.8
1970	205.2	1988	465.7
1971	190	1989	476.7
1972	188.6	1990	462.6
1973	196.7	1991	460.8
1974	180.3	1992	501.8
1975	210.8	1993	501.5
1976	196	1994	489.5
1977	223	1995	542.3
1978	238.2	1996	512.2
1979	263.5	1997	559.8
1980	292.6	1998	542

解：R 语言程序及结果见如下文本框。

```
>example1_5<-read.csv("C:/Users/86207/Desktop/时间序列_方/1_5.csv",sep=",",header=T)
>x<-ts(example1_5$沙产量,start=1964)
>x.fit<-HoltWinters(x,gamma=F)#进行 Holt 两参数指数平滑
>x.fit
Holt-Winters exponential smoothing with trend and without seasonal component.

Call:
HoltWinters(x = x, gamma = F)

Smoothing parameters:
alpha: 0.855644
beta : 0.158537
gamma: FALSE

Coefficients:
      [1]
a 565.55301
b  12.29066
>plot(x.fit)##绘制 Holt 两参数指数平滑拟合效果图
```

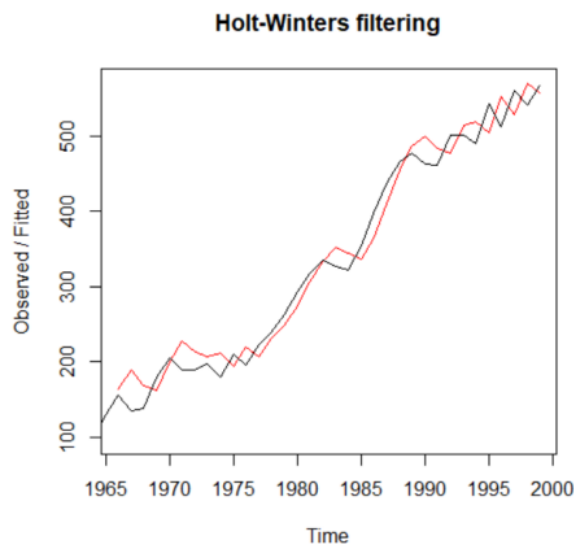


图 1.5 Holt 两参数指数平滑拟合效果图

说明：无滞后序列为观察值序列，滞后序列为 Holt 两参数指数平滑序列。

例 1.6 对 1962 年 1 月-1975 年 12 月平均每头奶牛月产奶量序列进行 Holt-Winters 三参数指数平滑，并预测未来两年平均每头奶牛的月度产奶量。数据如下表所示。

表 1.8 1962 年 1 月-1975 年 12 月平均每头奶牛月产奶量序列

年	月	产奶量	年	月	产奶量
1962	1	589	1969	1	734
1962	2	561	1969	2	690
1962	3	640	1969	3	785
1962	4	656	1969	4	805
1962	5	727	1969	5	871
1962	6	697	1969	6	845
1962	7	640	1969	7	801
1962	8	599	1969	8	764
1962	9	568	1969	9	725
1962	10	577	1969	10	723
1962	11	553	1969	11	690
1962	12	582	1969	12	734
1963	1	600	1970	1	750
1963	2	566	1970	2	707
1963	3	653	1970	3	807
1963	4	673	1970	4	824
1963	5	742	1970	5	886
1963	6	716	1970	6	859
1963	7	660	1970	7	819
1963	8	617	1970	8	783
1963	9	583	1970	9	740
1963	10	587	1970	10	747
1963	11	565	1970	11	711
1963	12	598	1970	12	751
1964	1	628	1971	1	804
1964	2	618	1971	2	756
1964	3	688	1971	3	860
1964	4	705	1971	4	878

1964	5	770	1971	5	942
1964	6	736	1971	6	913
1964	7	678	1971	7	869
1964	8	639	1971	8	834
1964	9	604	1971	9	790
1964	10	611	1971	10	800
1964	11	594	1971	11	763
1964	12	634	1971	12	800
1965	1	658	1972	1	826
1965	2	622	1972	2	799
1965	3	709	1972	3	890
1965	4	722	1972	4	900
1965	5	782	1972	5	961
1965	6	756	1972	6	935
1965	7	702	1972	7	894
1965	8	653	1972	8	855
1965	9	615	1972	9	809
1965	10	621	1972	10	810
1965	11	602	1972	11	766
1965	12	635	1972	12	805
1966	1	677	1973	1	821
1966	2	635	1973	2	773
1966	3	736	1973	3	883
1966	4	755	1973	4	898
1966	5	811	1973	5	957
1966	6	798	1973	6	924
1966	7	735	1973	7	881
1966	8	697	1973	8	837
1966	9	661	1973	9	784

1966	10	667	1973	10	791
1966	11	645	1973	11	760
1966	12	688	1973	12	802
1967	1	713	1974	1	828
1967	2	667	1974	2	778
1967	3	762	1974	3	889
1967	4	784	1974	4	902
1967	5	837	1974	5	969
1967	6	817	1974	6	947
1967	7	767	1974	7	908
1967	8	722	1974	8	867
1967	9	681	1974	9	815
1967	10	687	1974	10	812
1967	11	660	1974	11	773
1967	12	698	1974	12	813
1968	1	717	1975	1	834
1968	2	696	1975	2	782
1968	3	775	1975	3	892
1968	4	796	1975	4	903
1968	5	858	1975	5	966
1968	6	826	1975	6	937
1968	7	783	1975	7	896
1968	8	740	1975	8	858
1968	9	701	1975	9	817
1968	10	706	1975	10	827
1968	11	677	1975	11	797
1968	12	711	1975	12	843

解：R 语言程序及结果见如下文本框。

```
>example1_6<-read.csv("C:/Users/86207/Desktop/时间序列_方/1_6.csv",sep=",",header=T)
>x<-ts(example1_6$产奶量,start=c(1962,1),frequency=12)
>x.fit<-HoltWinters(x)##进行 Holt-Winters 三参数指数平滑
>x.fit
```

Holt-Winters exponential smoothing with trend and additive seasonal component.

Call:

```
HoltWinters(x = x)
```

Smoothing parameters:

alpha: 0.68933

beta : 0

gamma: 0.8362592

Coefficients:

[,1]

a 885.775547

b 1.278118

s1 -16.743296

s2 -59.730034

s3 47.492731

s4 56.203890

s5 115.537545

s6 84.554817

s7 39.580306

s8 -4.702033

s9 -54.554684

s10 -51.582594

s11 -85.953466

s12 -42.907363

```
> plot(x.fit)#三参数指数平滑拟合效果图
```

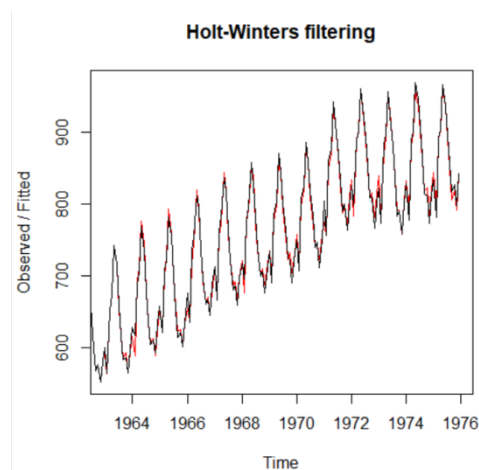


图 1.7 Holt-Winters 三参数指数平滑拟合效果图

```
> x.fore<-forecast(x.fit,h=24)#预测序列并绘制预测效果图  
> plot(x.fore)
```

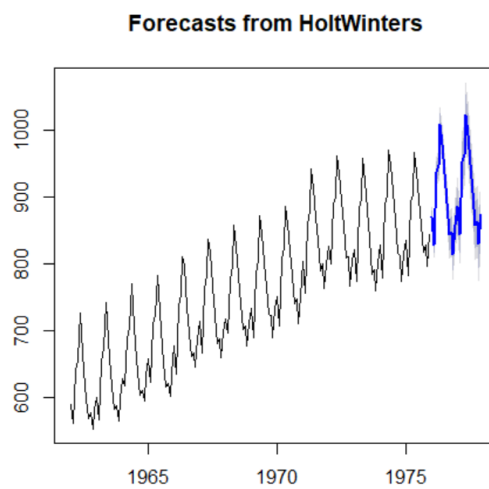


图 1.8 奶牛月度产奶量序列 Holt-Winters 三参数指数平滑序列预测图