第 1 章习题答案

1. 求下列各排列的逆序数.

(1) 314265;

(2) 542391786;

(3) $n(n-1)\cdots321$;

(4) $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

解:

(1) $0+1+0+2+0+1=4$, 是偶排列;

(2) $0+1+2+2+0+5+1+1+3=15$, 是奇排列;

(3) $0+1+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时是偶排列, 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时是奇排列;

(4) $0+0+\cdots+0+0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$, 是偶排列.

2. 求出 j, k 使 8 级排列 $24j517k8$ 为偶排列.

解:

将 8 级排列 $24j517k8$ 进行如下 4 次对换:

$$24j517k8 \xrightarrow{7\leftrightarrow k} 24j51k78 \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} 14j52k78 \xrightarrow{2\leftrightarrow 4} 12j54k78 \xrightarrow{4\leftrightarrow 5} 12j45k78$$

由第 3 页定理 1. 1, 对换改变奇偶性.

若 $24j517k8$ 是偶排列, 则 $12j45k78$ 也为偶排列, 所以有: $j=3$, $k=6$;

反之, 当 $j=3$, $k=6$ 时, $24j517k8=24351768$ 的逆序数为 $0+0+1+0+4+0+1+0=6$, 所以此时 $24j517k8$ 为偶排列.

综上, $j=3$, $k=6$ 是 8 级排列 $24j517k8$ 为偶排列的充要条件.

3. 写出行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 5 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 5 \\ x & 1 & 5 & 2x \end{vmatrix}$ 的展开式中包含 x 和 x^2 的项.

解:

设 $D_4=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 5 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 5 \\ x & 1 & 5 & 2x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,

则包含 x 的项为:

$$(a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}+a_{11}a_{24}a_{32}a_{43})+(a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}+a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41})$$
$$+(-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41})+(-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41})$$
$$=(25x+100x)+(25x+2x-5x)+(-10x-8x)+(-50x+25x+10x)$$
$$=125x+22x-18x-15x=114x.$$

包含 x^2 的项为：

$(-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42})+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$

$+(a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41})+a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$

$=(-125x^2-20x^2-10x^2)+2x^2+(8x^2-4x^2+10x^2)+5x^2$

$=-155x^2+2x^2+14x^2+5x^2=-134x^2$

4. 用定义计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

解：

$$原式=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4},$$

和式中唯一非 0 项为：

$(-1)^{\tau(3214)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=-120,$

$$所以\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-120.$$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

$$\begin{aligned}
&=(a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42})\\
&\quad+(a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}+a_{12}a_{24}a_{33}a_{41})\\
&\quad+(-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}+a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}+a_{13}a_{24}a_{31}a_{42})\\
&=(1+12-9)+(12-16+12)+(-9+12+81)\\
&=4+8+84\\
&=96
\end{aligned}$$

5. 计算下列行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

解：

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_4+r_2]{-2r_4+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{2c_3+c_2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = -7$$

（2）$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$；

解：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c+a & c+a+b & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

（3）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$；

解：

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{ar_2} \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -a & ab & a & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+r_2} \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(ab+1)r_3} \frac{1}{a(ab+1)}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & -(ab+1) & abc+c & ab+1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_3}\frac{1}{a(ab+1)}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & abc+a+c & ab+1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(abc+a+c)r_4}\frac{1}{a(ab+1)(abc+a+c)}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & abc+a+c & ab+1 \\ 0 & 0 & -(abc+a+c) & abcd+ad+cd \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_4}\frac{1}{a(ab+1)(abc+a+c)}\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ab+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & abc+a+c & ab+1 \\ 0 & 0 & 0 & abcd+ab+ad+cd+1 \end{vmatrix}$$

$$=abcd+ab+ad+cd+1$$

注：虽然推导过程需要 a，$ab+1$，$abc+a+c$ 均不为0，但容易看出当它们中一个或多个为0时，结论依然成立.

另外，也可以用递推公式求解.

设 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & & \\ -1 & x_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & -1 & x_n \end{vmatrix}$，沿最后一行展开得递推公式：

$D_n=x_nD_{n-1}+D_{n-2}(n\geqslant 3)$，所以由 $D_1=a$，$D_2=\begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{vmatrix}=ab+1$ 可得：

$$D_3=x_3D_2+D_1=c(ab+1)+a=abc+a+c$$

$$D_4=x_4D_3+D_2=d(abc+a+c)+(ab+1)=abcd+ab+ad+cd+1$$

(4) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解：

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}\xlongequal[j=3,2,1]{-c_j+c_{j+1}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 2a+5 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 2b+5 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 2c+5 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 2d+5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{-c_3+c_4 \\ -c_2+c_3}}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=0$$

6. 证明下列各式.

(1) $\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = (2a+b)(b-a)^2$;

证明：

$$\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a \\ 0 & b & a & a \\ 0 & a & b & a \\ 0 & a & a & b \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,4]{r_1+r_i} \begin{vmatrix} 1 & -a & -a & -a \\ 1 & b-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,4]{\frac{c_j}{a-b}+c_1} \begin{vmatrix} 1-\dfrac{3a}{a-b} & -a & -a & -a \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2a+b}{b-a}(b-a)^3$$

$$= (2a+b)(b-a)^2$$

(2) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix} = 0$;

证明：

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 & 1+x_2y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ 1+x_4y_1 & 1+x_4y_2 & 1+x_4y_3 & 1+x_4y_4 \end{vmatrix} \xlongequal[-r_3+r_4]{-r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 & 1+x_1y_4 \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & (x_2-x_1)y_3 & (x_2-x_1)y_4 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 & 1+x_3y_4 \\ (x_4-x_3)y_1 & (x_4-x_3)y_2 & (x_4-x_3)y_3 & (x_4-x_3)y_4 \end{vmatrix}$$

因为第二行和第四行元素对应成比例，所以由性质 1.4，行列式为 0.

(3) $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix} = n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)$;

证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n+1]{-c_1+c_j}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{\frac{r_i}{i-1}+r_1}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

(4) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=1+\sum_{i=1}^{n}a_i\ (a_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots,n).$

证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n+1]{-r_1+r_i}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n+1]{c_j+c_1}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

7. 计算下列 n 阶行列式.

(1) $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-xr_1+r_i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -x & & & \\ 1 & & -x & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & -x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{\frac{c_j}{x}+c_1} \begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & -x & & & \\ & & -x & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -x \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n-1}{x}(-x)^{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$;

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$=a_n\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i + (-1)^{n+1}(-1)^{n}\prod_{i=2}^{n-1} a_i$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=2}^{n-1} a_i$$

$$= (a_1 a_n - 1)\prod_{i=2}^{n-1} a_i$$

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}$;

解：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,\ 2,\ \cdots,\ n]{-c_{n+1}+c_j}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots & b_n-a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+(n+1)}\begin{vmatrix} b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots & b_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(a_i - b_i)$$

(4) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$;

解：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{-r_i+r_{i-1}}\begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\cdots,n-1]{-c_n+c_j}\begin{vmatrix} -n & & & & & 1 \\ & -n & & & & 1 \\ & & -n & & & 1 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & -n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=1,2,\cdots,n-1]{\frac{c_j}{n}+c_n}\begin{vmatrix} -n & & & & & \\ & -n & & & & \\ & & -n & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -n & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i}{n} \end{vmatrix}$$

$$=(-n)^{n-1}\left(1+\frac{n-1}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2}n^{n-1}(n+1)$$

（5）$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解：

沿第一行展开得：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1\text{阶}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1\text{阶}}$$

$$=2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-1\text{阶}}-\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{n-2\text{阶}}$$

$$=2D_{n-1}-D_{n-2}$$

因为 $D_1=2$，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3$，所以可设 $D_k=k+1$.

设当 $k<n$ 时结论成立，则由上式有：

$D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}=2(n-1+1)-(n-2+1)=2n-(n-1)=n+1$

所以当 $k=n$ 时结论依然成立.

由数学归纳法，$D_n=n+1$ 对于任意 n 成立.

8. 设

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & x \end{vmatrix}(n>1).$$

(1)求 D_n 的递推公式；(2)利用递推公式求 D_n.

解：

(1)沿最后一行展开得：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

$$=x\underbrace{\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & x \end{vmatrix}}_{n-1阶}-z\underbrace{\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & z & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z & 0 \end{vmatrix}}_{n-1阶}$$

$$=xD_{n-1}-yz(-1)^{1+(n-1)}\underbrace{\begin{vmatrix} z & x & & \\ & z & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ & & & z \end{vmatrix}}_{n-2阶}=xD_{n-1}+(-1)^{n-1}yz^{n-1}$$

(2)由上式移项，并依次取 n，$n-1$，$\cdots$，2 得：

$D_n-xD_{n-1}=y(-z)^{n-1}$

$D_{n-1}-xD_{n-2}=y(-z)^{n-2}$

$\cdots$

$D_2-xD_1=y(-z)^1$

从上到下每个式子分别乘 1，x，x^2，$\cdots$，x^{n-2} 得：

$D_n-xD_{n-1}=y(-z)^{n-1}$

$xD_{n-1}-x^2D_{n-2}=xy(-z)^{n-2}$

$\cdots$

$x^{n-2}D_2-x^{n-1}D_1=x^{n-2}y(-z)^1$

将这$(n-1)$个等式左右分别相加得：

$$D_n-x^{n-1}D_1=-yz[(-z)^{n-2}+x(-z)^{n-3}+\cdots+x^{n-2}]=\frac{yz}{x+z}[(-z)^{n-1}-x^{n-1}]$$

因为 $D_1=x$，所以有：$D_n=x^n+\dfrac{yz}{x+z}[(-z)^{n-1}-x^{n-1}]$

9. 计算当 $a_i\neq 0$，$i=1$，2，$\cdots$，n 时，n 阶行列式的值.

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

解：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\,3,\,\cdots,\,n+1]{-r_1+r_i}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -1 & 1 & & & \\ -1 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & & & & 1\end{vmatrix}\xlongequal[j=2,\,3,\,\cdots,\,n+1]{c_j+c_1}\begin{vmatrix}1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n}a_i$$

10. 证明：n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=\cos n\theta.$$

证明：

设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}$，则有：

$D_1=\cos\theta$，$D_2=\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

也就是说 $D_n=\cos n\theta$ 在 $n=1$，2 时成立. 不妨设对于 $n<k$ 时，$D_n=\cos n\theta$ 成立，则将 D_k 沿最后一行展开得：

$$D_k=\underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}}_{k\text{阶}}$$

$$=D_{k-1}2\cos\theta-D_{k-2}=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos(k-2)\theta$$
$$=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-\cos[(k-1)\theta-\theta]$$
$$=2\cos\theta\cos(k-1)\theta-[\cos(k-1)\theta\cos\theta+\sin(k-1)\theta\sin\theta]$$
$$=\cos(k-1)\theta\cos\theta-\sin(k-1)\theta\sin\theta$$
$$=\cos[(k-1)\theta+\theta]=\cos k\theta$$

所以当 $n=k$ 时，$D_n=\cos n\theta$ 仍然成立.

由数学归纳法，对于任意的自然数 n，$D_n=\cos n\theta$ 都成立，命题得证.

11. 证明：n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}=1.$$

证明：

因为当 a，b 都是自然数且 $a\geqslant b$ 时，$C_a^b=\dfrac{a!}{b!\,(a-b)!}$，所以有：

$$C_{a-1}^b+C_{a-1}^{b-1}=\frac{(a-1)!}{b!\,(a-1-b)!}+\frac{(a-1)!}{(b-1)!\,[(a-1)-(b-1)]!}=\frac{(a-b)(a-1)!}{b!\,(a-b)!}+\frac{b(a-1)!}{b(b-1)!\,(a-b)!}$$
$$=\frac{[(a-b)+b](a-1)!}{b!\,(a-b)!}=\frac{a!}{b!\,(a-b)!}=C_a^b$$

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}\xlongequal[i=n-1,\ n-2,\ \cdots,\ 1]{-r_i+r_{i+1}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ 0 & C_2^2 & C_3^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{沿第一列展开}}\begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_n^2 \\ C_3^3 & C_4^3 & C_5^3 & \cdots & C_{n+1}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=n-2,\ n-3,\ \cdots,\ 1]{-c_j+c_{j+1}}\begin{vmatrix} C_1^1 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_{n-2}^0 \\ C_2^2 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_3^3 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-2} & \cdots & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=D_{n-1}=D_{n-2}=\cdots=D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & C_2^1 \end{vmatrix}=1$$

12. 设四阶行列式为$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，其中 A_{4i} 是 a_{4i} 元素的代数余子式($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$).

解：

由拉普拉斯展开定理可知，只需要把四阶行列式的第四行元素全部换成 1，其余元素不变，所得行列式沿第四行展开，即为 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$. 也就是说：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-c_1+c_3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\xrightarrow{\text{沿第 1 行展开}}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{-c_3+c_1}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{沿第 3 行展开}}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-5$$

13. 已知 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

试求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$，其中 A_{1i} 是 a_{1i} 元素的代数余子式($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$).

解：

由拉普拉斯展开定理可知，只需要把 n 阶行列式的第 1 行元素全部换成 1，其余元素不变，所得行列式沿第 1 行展开，即为 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$. 也就是说：

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,\ 3,\ \cdots,\ n]{-\frac{r_i}{i}+r_1}\begin{vmatrix}1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}&0&0&\cdots&0\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

$$=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

14. 用克莱姆法则解方程组.

$$(1)\begin{cases}6x_1+4x_3+x_4=3,\\x_1-x_2+2x_3+x_4=1,\\4x_1+x_2+2x_3=1,\\x_1+x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix}6&0&4&1\\1&-1&2&1\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-1&3&0\\0&-2&1&0\\4&1&2&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-1&3\\0&-2&1\\4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&5&3\\0&0&1\\4&5&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&5\\4&5\end{vmatrix}=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3&0&4&1\\1&-1&2&1\\1&1&2&0\\0&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&3&1\\1&-2&1&1\\1&1&2&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&3\\1&-2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&3\\0&-2&1\\-1&1&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&3\\-2&1\end{vmatrix}=-5$$

$$D_2=\begin{vmatrix}6&3&4&1\\1&1&2&1\\4&1&2&0\\1&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&3&0\\0&1&1&0\\4&1&2&0\\1&0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&3\\0&1&1\\4&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3&0\\0&1&0\\4&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&3\\0&1\end{vmatrix}=5$$

$$D_3=\begin{vmatrix}6&0&3&1\\1&-1&1&1\\4&1&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-1&3&0\\0&-2&1&0\\4&1&1&0\\1&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&-1&3\\0&-2&1\\4&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&5&3\\0&0&1\\4&3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&5\\4&3\end{vmatrix}=5$$

$$D_4=\begin{vmatrix}6&0&4&3\\1&-1&2&1\\4&1&2&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&0&4&3\\1&-1&2&1\\5&0&4&2\\2&0&3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}6&4&3\\5&4&2\\2&3&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&4&3\\1&4&2\\0&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&3\\3&1\end{vmatrix}=-5$$

于是方程组有解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=-1,\ x_4=\frac{D_4}{D}=1$$

（2）$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=0, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=0. \end{cases}$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & -7 & -11 \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & -27 \\ 0 & -6 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -27 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}=-153\neq 0$$

由于该方程组为齐次线性方程组，根据克拉姆法则知，方程组仅有零解.

15. λ 为何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ \lambda x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$$

有唯一零解？

解：

由克莱姆法则，只有系数行列式 $D\neq 0$ 时，齐次方程组有唯一零解.

因为 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2\neq 0$

所以 $\lambda\neq -2$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，齐次方程组有唯一零解.

16. 问：齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$$

有非零解时，a，b 必须满足什么条件？

解：

由克莱姆法则，齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D=0$. 由

$$0=D=\begin{vmatrix}1&1&1&a\\1&2&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&a\\1&1&1&1\\1&0&-3&1\\1&0&a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&-3&1\\1&a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4&a-1\\1&-3&1\\0&a+3&b-1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}4&a-1\\a+3&b-1\end{vmatrix}=(a+1)^2-4b$$

可知，如果齐次线性方程组有非零解，则$(a+1)^2-4b=0$.

17. 求一个二次多项式$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$，使得

$f(1)=-1$, $f(-1)=9$, $f(2)=-3$.

解：

由题意有：

$$\begin{cases}a_0+a_1+a_2=f(1)=-1,\\a_0-a_1+a_2=f(-1)=9,\\a_0+2a_1+4a_2=f(2)=-3,\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\1&2&4\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}-1&1&1\\9&-1&1\\-3&2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0&0\\9&8&10\\-3&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}8&10\\-1&1\end{vmatrix}=-18$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&9&1\\1&-3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&10&0\\1&-3&4\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=30$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&9\\1&2&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-2&10\\1&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&10\\1&-2\end{vmatrix}=-6$$

所以有：

$$a_0=\frac{D_1}{D}=3,\ a_1=\frac{D_2}{D}=-5,\ a_2=\frac{D_3}{D}=1$$

所求二次多项式为：

$$f(x)=3-5x+x^2$$

18. 设 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$，求 D_n 中所有元素的代数余子式之和.

解：

第 i 行的代数余子式之和，等于将第 i 行的所有元素全部换成 1 所得行列式的值.

由于第 1 行元素全部为 1，所以如果 $i\neq1$，则第 i 行的所有元素全部换成 1 后，第 i 行就会和第 1 行完全相同，所以此时第 i 行的代数余子式之和必然为零.

所以 D_n 中所有元素的代数余子式之和就是第 1 行元素的代数余子式之和，也就是把第 1 行的所有元素全部换成 1 所得行列式的值，即 D_n 本身.

因为 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$，所以 D_n 中所有元素的代数余子式之和为 $n!$.