第 2 章习题答案

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}$，求：

(1) $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}$；(2) $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$；(3) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

解：

$$(1)\ 2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}=2\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times1&2\times3\\2\times2&2\times(-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\times2&-3\times(-1)\\-3\times3&-3\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&6\\4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&3\\-9&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+(-6)&6+3\\4+(-9)&(-2)+(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&9\\-5&-14\end{pmatrix}$$

$$(2)\ \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+3\times2&1\times3+3\times(-1)\\2\times1+(-1)\times2&2\times3+(-1)\times(-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\times2+(-1)\times3&2\times(-1)+(-1)\times4\\3\times2+4\times3&3\times(-1)+4\times4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-6\\18&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+1&0+(-6)\\0+18&7+13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-6\\18&20\end{pmatrix}$$

$$(3)\ \boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times2+3\times3&1\times(-1)+3\times4\\2\times2+(-1)\times3&2\times(-1)+(-1)\times4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\times1+(-1)\times2&2\times3+(-1)\times(-1)\\3\times1+4\times2&3\times3+4\times(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11&11\\1&-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&7\\11&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-0&11-7\\1-11&-6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&4\\-10&-11\end{pmatrix}$$

2. 计算下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}(3\quad -2\quad -1\quad 1)$；

解：

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}(3\quad -2\quad -1\quad 1)=\begin{pmatrix}1\times3&1\times(-2)&1\times(-1)&1\times1\\2\times3&2\times(-2)&2\times(-1)&2\times1\\1\times3&1\times(-2)&1\times(-1)&1\times1\\0\times3&0\times(-2)&0\times(-1)&0\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&-2&-1&1\\6&-4&-2&2\\3&-2&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$；

解：

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3+0\times(-1)+0\times2\\0\times3+1\times(-1)+1\times2\\(-1)\times3+2\times(-1)+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\-3\end{pmatrix}$$

(3) $(1,\ 2,\ 3,\ -1)\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}$；

解：

$$(1,\ 2,\ 3,\ -1)\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix}=1\times2+2\times0+3\times1+(-1)\times3=2$$

(4) $(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$；

解：

$$(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3,\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3,\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3)x_1+(a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3)x_2+(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3)x_3$$

$$=a_{11}x_1^2+a_{21}x_1x_2+a_{31}x_1x_3+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+a_{32}x_2x_3+a_{13}x_1x_3+a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2$$

(5) $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$；

解：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\times1+a_{12}\times0+a_{13}\times0&a_{11}\times0+a_{12}\times1+a_{13}\times0&a_{11}\times0+a_{12}\times1+a_{13}\times1\\a_{21}\times1+a_{22}\times0+a_{23}\times0&a_{21}\times0+a_{22}\times1+a_{23}\times0&a_{21}\times0+a_{22}\times1+a_{23}\times1\\a_{31}\times1+a_{32}\times0+a_{33}\times0&a_{31}\times0+a_{32}\times1+a_{33}\times0&a_{31}\times0+a_{32}\times1+a_{33}\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{12}+a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{22}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{32}+a_{33}\end{pmatrix}$$

（6）$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-1&4\\0&0&3&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&3&-2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&-1&4\\0&0&3&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&3&-2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\times1+2\times0+3\times0+0\times0 & 1\times0+2\times1+3\times0+0\times0 & 1\times2+2\times3+3\times(-1)+0\times0 & 1\times1+2\times(-2)+3\times1+0\times(-2)\\ 0\times1+1\times0+(-1)\times0+4\times0 & 0\times0+1\times1+(-1)\times0+4\times0 & 0\times2+1\times3+(-1)\times(-1)+4\times0 & 0\times1+1\times(-2)+(-1)\times1+4\times(-2)\\ 0\times1+0\times0+3\times0+1\times0 & 0\times0+0\times1+3\times0+1\times0 & 0\times2+0\times3+3\times(-1)+1\times0 & 0\times1+0\times(-2)+3\times1+1\times(-2)\\ 0\times1+0\times0+0\times0+2\times0 & 0\times0+0\times1+0\times0+2\times0 & 0\times2+0\times3+0\times(-1)+2\times0 & 0\times1+0\times(-2)+0\times1+2\times(-2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&5&0\\0&1&4&-11\\0&0&-3&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$$

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&4\\2&3&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$，求：

（1）$3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$；（2）$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$；（3）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗？

解：

（1）

$$3\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-6&12\\6&9&-3\\0&3&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4&2\\-2&2&0\\0&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-10&10\\8&7&-3\\0&5&3\end{pmatrix}$$

（2）

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&4\\2&3&-1\\0&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2&4\\2&3&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&5&5\\1&5&-5\\-2&0&10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-4&13\\-1&6&-1\\-1&-2&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&-8\\2&-1&-4\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

（3）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，这是因为：

$(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2)=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{0}$

4. 举例说明下列命题是错误的.

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$；

（3）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

解：

(1) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$.

(3) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{Y}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，问：

(1) $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 吗？

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 吗？

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 吗？

解：

(1) 因为：

$\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\4&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&2\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

(2) 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)=(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2)-(\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2)=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$，

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$.

(3) 因为 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2-\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$，

所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，…，$\boldsymbol{A}^k$.

解：

因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\lambda\\0&1\end{pmatrix}$，由此可以猜测 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&k\lambda\\0&1\end{pmatrix}$.

当 $k=1$，2，时结论显然成立.

设对于任意的 $k<n$，结论成立，则当 $k=n$ 时有：

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&(n-1)\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n\lambda\\0&1\end{pmatrix}$$

所以当 $k=n$ 时，结论依然成立.

由数学归纳法，对于任意的自然数 k 有：

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&k\lambda\\0&1\end{pmatrix}$$

7. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$.

解：

因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，所以有：

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}\lambda^2&2\lambda&0\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&2\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{pmatrix}$$

8. 把下列矩阵化为行最简形矩阵.

（1）$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&-3\end{pmatrix}$；

解：

$$\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\3&0&4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\2&0&3&1\\1&0&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&0&1&2\\1&0&1&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&0&1&2\\0&0&0&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{6}r_3}\begin{pmatrix}1&0&2&-1\\1&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\1&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}$；

解：

$$\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&4&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&3&-4&3\\0&1&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&2&-3&1\\0&1&-1&2\\0&1&-3&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_3+r_1}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&1&-1&2\\0&1&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&-1&-3\\0&1&-3&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&-1&-3\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&-3&-9\end{pmatrix}\xrightarrow{3r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&1&0&5\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

解:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_4+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1+r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2+r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

解:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-8r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&2&0&-2&-4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&0&4\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&0&4\\0&-1&1&0&-3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&-1&1&0&-3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

9. 求下列矩阵的秩，并求一个最高阶非零子式.

(1) $\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}$；

解：

$$\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_3]{-3r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&4&-6&5\\1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}0&4&-6&5\\1&-1&2&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-1\\0&4&-6&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

该矩阵秩 $R(\boldsymbol{A})=2$，一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}3&1\\1&-1\end{vmatrix}=-4$.

(2) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$；

解：

$$\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\0&-7&11&9&-7\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\0&-7&11&9&-7\\0&-21&33&27&-22\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -4 & 2\\0 & -7 & 11 & 9 & -7\\0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

该矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$，一个最高阶非零子式为：

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\2 & -1 & -3\\7 & 0 & -8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 0 & -7\\2 & -1 & -3\\7 & 0 & -8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7 & -7\\7 & -8\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7 & 0\\7 & -1\end{vmatrix}=7$$

（3）$\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\2 & -3 & 0 & 7 & -5\\3 & -2 & 5 & 8 & 0\\1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

解：

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 8 & 3 & 7\\2 & -3 & 0 & 7 & -5\\3 & -2 & 5 & 8 & 0\\1 & 0 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\2 & -3 & 0 & 7 & -5\\3 & -2 & 5 & 8 & 0\\2 & 1 & 8 & 3 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-3r_1+r_3\\-2r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\0 & -3 & -6 & 3 & -5\\0 & -2 & -4 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\0 & -2 & -4 & 2 & 0\\0 & -3 & -6 & 3 & -5\\0 & 1 & 2 & -1 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 0\\0 & -3 & -6 & 3 & -5\\0 & 1 & 2 & -1 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_4]{3r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & -5\\0 & 0 & 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{7}{5}r_3+r_4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & -5\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

该矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$，一个最高阶非零子式为：

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & -5\\3 & -2 & 0\\1 & 0 & 0\end{vmatrix}=-10$$

10. 已知线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+y_2,\\x_2=-2y_1+3y_2+2y_3,\\x_3=4y_1+y_2+5y_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\y_2=2z_1+z_3,\\y_3=-z_2+3z_3,\end{cases}$$

利用矩阵乘法求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换.

解：

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3, \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，则有：

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AY}$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{BZ}$

所以有：

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AY} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BZ}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{Z}$

因为 $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix}$，所以有：

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \boldsymbol{Z}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 12 & -4 & 9 \\ -10 & -1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

展开得线性变换：

$$\begin{cases} x_1 = -4z_1 + 2z_2 + z_3, \\ x_2 = 12z_1 - 4z_2 + 9z_3, \\ x_3 = -10z_1 - z_2 + 16z_3. \end{cases}$$

11. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，证明：$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称阵.

证明：

因为 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$，因而有：

$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$,

所以 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AB}$ 也是对称阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称方阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 为对称阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明：

先证必要性. 设 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵，则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{AB}$，又由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称方阵有：

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$，所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}$，综上有 $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}$.

再证充分性. 设 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$，由 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称方阵有：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$，所以有：

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 为对称阵. 证毕.

13. $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{B}^2$ 是对称矩阵.

(2) $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵.

证明：

由 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶反对称矩阵有：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$.

(1) 因为 $(\boldsymbol{B}^2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(-\boldsymbol{B})(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}^2$，所以 $\boldsymbol{B}^2$ 是对称矩阵.

(2) 因为 $(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$，所以 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是对称矩阵；

因为 $(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{B})=-(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA})$，所以 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵.

14. 求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$；

解：

伴随矩阵法：$|\boldsymbol{A}|=1\times3-2\times2=-1$

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$；

解：

伴随矩阵法：

$|\boldsymbol{A}|=1$

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\ \boldsymbol{A}_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0,\ \boldsymbol{A}_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=10,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-4,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$A^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 10\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

初等变换法：

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-2r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-3r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 10\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1})$$

所以有：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 10\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

（3）$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$；

解：

伴随矩阵法：

$|A|=-1$

$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2$，$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$，$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$，$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$，$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$

$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-1$，$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=0$，$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1$

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=-\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

初等变换法：

$$(A \vdots E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2+r_3]{-2r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)=(E \vdots A^{-1})$$

所以有：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

（4）$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

解：

初等变换法：

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\-1&3&0&0&0&1&0&0\\2&1&3&0&0&0&1&0\\3&4&1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-3r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2\\-2r_1+r_3}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&0&1&1&0&0\\0&1&3&0&-2&0&1&0\\0&4&1&2&-3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3r_4]{3r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&0&1&1&0&0\\0&3&9&0&-6&0&3&0\\0&12&3&6&-9&0&0&3\end{array}\right)\xrightarrow[-4r_2+r_4]{-r_2+r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&0&1&1&0&0\\0&0&9&0&-7&-1&3&0\\0&0&3&6&-13&-4&0&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3r_4}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&0&1&1&0&0\\0&0&9&0&-7&-1&3&0\\0&0&9&18&-39&-12&0&9\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3+r_4}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&3&0&0&1&1&0&0\\0&0&9&0&-7&-1&3&0\\0&0&0&18&-32&-11&-3&9\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2r_3]{\substack{18r_1\\6r_2}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}18&0&0&0&18&0&0&0\\0&18&0&0&6&6&0&0\\0&0&18&0&-14&-2&6&0\\0&0&0&18&-32&-11&-3&9\end{array}\right)=(18\boldsymbol{E} \vdots 18\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}18&0&0&0\\6&6&0&0\\-14&-2&6&0\\-32&-11&-3&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{7}{9}&-\frac{1}{9}&\frac{1}{3}&0\\-\frac{16}{9}&-\frac{11}{18}&-\frac{1}{6}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

15. 利用逆矩阵，解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=1,\\x_2-2x_3=-1,\\3x_1-x_2=2.\end{cases}$$

解：

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-2\\3&-1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$，则线性方程组可以写成：

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得：

$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\3&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-3r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&-4&3&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{4r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&-5&-3&4&1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_3]{\substack{5r_1\\5r_2}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}5&5&-5&5&0&0\\0&5&-10&0&5&0\\0&0&5&3&-4&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2r_3+r_2]{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}5&5&0&8&-4&-1\\0&5&0&6&-3&-2\\0&0&5&3&-4&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}5&0&0&2&-1&1\\0&5&0&6&-3&-2\\0&0&5&3&-4&-1\end{array}\right)=(5\boldsymbol{E}\ \vdots\ 5\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以，$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1&1\\6&-3&-2\\3&-4&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1&1\\6&-3&-2\\3&-4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

16. 证明下列命题.

(1)若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆矩阵，则$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$；

(2)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆且$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$；

(3)若 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

证明：

(1)因为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是同阶可逆矩阵，所以$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$|\boldsymbol{B}|\neq0$，$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}|\neq0$，因而有：

$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{AB}|}(\boldsymbol{AB})^*$，$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}^*$

所以有：

$(\boldsymbol{AB})^*=|\boldsymbol{AB}|(\boldsymbol{AB})^{-1}=|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}=(|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1})(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

(2)因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，所以$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$，所以有：

$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*\right)=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A}^*$

因而 $1=|\boldsymbol{E}|=\left|\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}\right||\boldsymbol{A}^*|$，这就表明$|\boldsymbol{A}^*|\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，

而由 $\boldsymbol{A}$ 可逆可知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可逆，所以由$|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{AA}^{-1}|=|\boldsymbol{E}|=1$ 可得：

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}^{-1}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^*$，所以$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

(3)若 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，则$|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{E}|=1$，又因为$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，所以$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$.

因为$\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，所以有：

$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

又由(2)有：$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$，所以有：$(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

17. 解下列矩阵方程：

(1)$\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\end{pmatrix}$；

解：

$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

解:

首先求$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$.

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

解:

$$\boldsymbol{X}=\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{X}\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&0\\3&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&0\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

解：

显然 $\boldsymbol{E}(1,2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}(2,3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，所以

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}=\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\boldsymbol{X}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3&0&-2\\1&-1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\1 & 2 & -1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

18. 设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

证明：

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{A}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-4\boldsymbol{E}\Rightarrow(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{E}-\frac{1}{4}\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{E}$$

所以 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{3}{4}\boldsymbol{E}-\frac{1}{4}\boldsymbol{A}$.

19. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\1 & 1 & 0\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{A}\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+2\boldsymbol{E}$$
$$\Rightarrow(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}[(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}]=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}[(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+2\boldsymbol{E}]$$
$$\Rightarrow[(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})]\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})+(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}2\boldsymbol{E}$$
$$\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\-1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{-3r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3\\0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3\\0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\vdots(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1})$$

所以$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\1 & -5 & -3\\-1 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -8 & -6\\2 & -9 & -6\\-2 & 12 & 9\end{pmatrix}$$

20. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明：

(1)若$|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；

(2) $|A^*|=A^{n-1}$.

证明：

(1)反证法.

若$|A|=0$且$|A^*|\neq 0$，则A^*可逆. 于是有：

$A=((A^*)^{-1}A^*)A=(A^*)^{-1}(A^*A)=(A^*)^{-1}(|A|E)=(A^*)^{-1}O=O$，

也就是说A是n阶零矩阵，显然其任一$n-1$阶代数余子式为0，所以$A^*=O$，这与$|A^*|\neq 0$矛盾.

(2)如果$|A|=0$，则由(1)结论，等式两边都是0.

如果$|A|\neq 0$，则A可逆，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，所以有：

$$|A^{-1}|=\left|\frac{1}{|A|}A^*\right|=\frac{1}{|A|^n}|A^*|$$

$$|A^*|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}|A\|A^{-1}|=|A|^{n-1}|AA^{-1}|=|A|^{n-1}|E|=|A|^{n-1}$$

综上所述，无论$|A|$是否为0，都有$|A^*|=A^{n-1}$.

21. 用矩阵分块的方法，证明下列矩阵可逆，并求其逆矩阵.

(1)$\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$；

证明：

设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$，$B=3$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&&\\&B&\\&&C\end{pmatrix}$，

所以由$A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$，$B^{-1}=\dfrac{1}{3}$，$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$有：

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0&0\\2&5&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&&\\&B^{-1}&\\&&C^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&0&0&0\\-2&1&0&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

(2)$\begin{pmatrix}0&0&3&-1\\0&0&2&1\\2&1&0&0\\-2&3&0&0\end{pmatrix}$；

证明：

设$A_1=\begin{pmatrix}3&-1\\2&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}$，则$\begin{pmatrix}0&0&3&-1\\0&0&2&1\\2&1&0&0\\-2&3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&A_1\\A_2&\end{pmatrix}$

因为 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，所以有：

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0\\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

（3）$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

解：

设 $\boldsymbol{E}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$，则有：

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{A}_{23}\\ O & \boldsymbol{E}_3\end{pmatrix}$$

设其逆矩阵为 $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{22} & \boldsymbol{X}_{23}\\ \boldsymbol{X}_{32} & \boldsymbol{X}_{33}\end{pmatrix}$，

则有 $\begin{pmatrix}2\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{A}_{23}\\ O & \boldsymbol{E}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{22} & \boldsymbol{X}_{23}\\ \boldsymbol{X}_{32} & \boldsymbol{X}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_3\end{pmatrix}$，展开得：

$\begin{cases}2\boldsymbol{X}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{X}_{32}=\boldsymbol{E}_2,\\ 2\boldsymbol{X}_{23}+\boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{X}_{33}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{X}_{32}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{X}_{33}=\boldsymbol{E}_3,\end{cases}$ 容易解得：$\begin{cases}\boldsymbol{X}_{22}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_2,\\ \boldsymbol{X}_{23}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{23},\\ \boldsymbol{X}_{32}=\boldsymbol{O},\\ \boldsymbol{X}_{33}=\boldsymbol{E}_3,\end{cases}$

所以有：

$$\begin{pmatrix}2&0&1&0&2\\0&2&0&1&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{22}&\boldsymbol{X}_{23}\\\boldsymbol{X}_{32}&\boldsymbol{X}_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_2&-\frac{1}{2}\boldsymbol{A}_{23}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&0&-1\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

22. 利用初等变换求下列矩阵的逆矩阵.

（1）$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&5\\1&0&4\end{pmatrix}$；

解：

$$(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&0&0\\2&1&5&0&1&0\\1&0&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&4&0&0&1\\2&1&5&0&1&0\\1&2&1&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&4&0&0&1\\0&1&-3&0&1&-2\\0&2&-3&1&0&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-2r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&4&0&0&1\\0&1&-3&0&1&-2\\0&0&3&1&-2&3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&4&0&0&1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&3&1&-2&3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&4&0&0&1\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-4r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{4}{3}&\frac{8}{3}&-3\\0&1&0&1&-1&1\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{array}\right)=(\boldsymbol{E}\vdots\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以有：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}&\frac{8}{3}&-3\\1&-1&1\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{pmatrix}$$

（2）$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&1\\1&-2&-1&-2\\3&1&2&1\end{pmatrix}$；

解：

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\1&2&0&1&0&1&0&0\\1&-2&-1&-2&0&0&1&0\\3&1&2&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-3r_1+r_4]{\substack{-r_1+r_2\\-r_1+r_3}}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&-1&1&0&0\\0&-3&-1&-2&-1&0&1&0\\0&-2&2&1&-3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2r_2+r_4]{3r_2+r_3}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&-4&3&1&0\\0&0&2&3&-5&2&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{2r_3+r_4}\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&-1&1&0&0\\0&0&-1&1&-4&3&1&0\\0&0&0&5&-13&8&2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-5r_3]{\substack{5r_1\\5r_2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc}5&5&0&0&5&0&0&0\\0&5&0&5&-5&5&0&0\\0&0&5&-5&20&-15&-5&0\\0&0&0&5&-13&8&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_4+r_3]{-r_4+r_2}\left(\begin{array}{cccc:cccc}5&5&0&0&5&0&0&0\\0&5&0&0&8&-3&-2&-1\\0&0&5&0&7&-7&-3&1\\0&0&0&5&-13&8&2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccccc:ccc}5&0&0&0&-3&3&2&1\\0&5&0&0&8&-3&-2&-1\\0&0&5&0&7&-7&-3&1\\0&0&0&5&-13&8&2&1\end{array}\right)=(5\boldsymbol{E} \vdots 5\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以有：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&3&2&1\\8&-3&-2&-1\\7&-7&-3&1\\-13&8&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{3}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{8}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{7}{5}&-\frac{7}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{1}{5}\\-\frac{13}{5}&\frac{8}{5}&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

(3) $\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&1&0\\4&-1&5\end{pmatrix}$;

解：

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&2&3&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\4&-1&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[4r_1+r_3]{2r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&2&3&1&0&0\\0&5&6&2&1&0\\0&7&17&4&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{5r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&2&3&1&0&0\\0&5&6&2&1&0\\0&35&85&20&0&5\end{array}\right)\xrightarrow{-7r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&2&3&1&0&0\\0&5&6&2&1&0\\0&0&43&6&-7&5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[43r_2]{43r_1}$$

$$\begin{pmatrix}-43 & 86 & 43\times3 & \vdots & 43 & 0 & 0\\ 0 & 43\times5 & 43\times6 & \vdots & 86 & 43 & 0\\ 0 & 0 & 43 & \vdots & 6 & -7 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow[-6r_3+r_2]{-3r_3+r_1}\begin{pmatrix}-43 & 86 & 0 & \vdots & 25 & 21 & -15\\ 0 & 43\times5 & 0 & \vdots & 50 & 85 & -30\\ 0 & 0 & 43 & \vdots & 6 & -7 & 5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_2]{-r_1}\begin{pmatrix}43 & -86 & 0 & \vdots & -25 & -21 & 15\\ 0 & 43 & 0 & \vdots & 10 & 17 & -6\\ 0 & 0 & 43 & \vdots & 6 & -7 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}43 & 0 & 0 & \vdots & -5 & 13 & 3\\ 0 & 43 & 0 & \vdots & 10 & 17 & -6\\ 0 & 0 & 43 & \vdots & 6 & -7 & 5\end{pmatrix}=(43\boldsymbol{E}\ \vdots\ 43\boldsymbol{A}^{-1})$$

所以有：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{43}\begin{pmatrix}-5 & 13 & 3\\ 10 & 17 & -6\\ 6 & -7 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{43} & \frac{13}{43} & \frac{3}{43}\\ \frac{10}{43} & \frac{17}{43} & -\frac{6}{43}\\ \frac{6}{43} & -\frac{7}{43} & \frac{5}{43}\end{pmatrix}$$

（4）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

解：

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_3+r_2\\ -r_4+r_3}]{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1})$$

所以有：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

23. 求下列矩阵的秩.

（1）$\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 1 & 7 & 2\\ 3 & 11 & 1\end{pmatrix}$；

解：

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 1 & 7 & 2\\ 3 & 11 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 0 & -10 & -5\\ 0 & -10 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1 & 7 & 2\\ 0 & -10 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因为行阶梯形矩阵有 2 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

（2）$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\\2&1&2&-2\end{pmatrix}$；

解：

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\3&-1&5&-3\\2&1&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&5&-4&0\\0&5&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\0&5&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为行阶梯形矩阵有 2 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

（3）$\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\2&3&4&1&1\\3&5&7&5&2\\1&1&1&-3&0\end{pmatrix}$；

解：

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\2&3&4&1&1\\3&5&7&5&2\\1&1&1&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2\\-3r_1+r_3\\-r_1+r_4}}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&-1&-2&-7&-1\\0&-1&-2&-7&-1\\0&-1&-2&-7&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{-r_2+r_3\\-r_2+r_4}}\begin{pmatrix}1&2&3&4&1\\0&-1&-2&-7&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为行阶梯形矩阵有 2 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

（4）$\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\\4&5&6&32&77\end{pmatrix}$；

解：

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\\4&5&6&32&77\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_1+r_5]{-r_1+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&2&3&13&28\\0&5&6&28&61\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5r_2+r_5]{-2r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&3&9&18\\0&0&6&18&36\end{pmatrix}\xrightarrow[-6r_3+r_5]{-3r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为行阶梯形矩阵有 3 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=3$.

（5）$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$；

解：

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_5]{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_4+r_5]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

因为行阶梯形矩阵有 5 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=5$.

（6）$\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$.

解：

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{-ar_1+r_i}\begin{pmatrix}1&a&a&a\\0&1-a^2&a-a^2&a-a^2\\0&a-a^2&1-a^2&a-a^2\\0&a-a^2&a-a^2&1-a^2\end{pmatrix}$$

当 $a=1$ 时，只有 1 个非零行，所以此时 $R(\boldsymbol{A})=1$；

当 $a\neq1$ 时，$1-a\neq0$，继续初等行变换有：

$$\begin{pmatrix}1&a&a&a\\0&1-a^2&a-a^2&a-a^2\\0&a-a^2&1-a^2&a-a^2\\0&a-a^2&a-a^2&1-a^2\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,3,4]{\frac{1}{1-a}r_i}\begin{pmatrix}1&a&a&a\\0&1+a&a&a\\0&a&1+a&a\\0&a&a&1+a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_4+r_2}\begin{pmatrix}1&a&a&a\\0&1&0&-1\\0&a&1+a&a\\0&a&a&1+a\end{pmatrix}\xrightarrow[-ar_2+r_4]{-ar_2+r_3}\begin{pmatrix}1&a&a&a\\0&1&0&-1\\0&0&1+a&2a\\0&0&a&1+2a\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_4+r_3}\begin{pmatrix}1 & a & a & a\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & a & 1+2a\end{pmatrix}\xrightarrow{-ar_3+r_4}\begin{pmatrix}1 & a & a & a\\0 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1+3a\end{pmatrix}$$

当 $a=-\dfrac{1}{3}$ 时，行阶梯形矩阵有 3 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=3$；

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-\dfrac{1}{3}$ 时，行阶梯形矩阵有 4 个非零行，所以 $R(\boldsymbol{A})=4$.

综上有：

$$R(\boldsymbol{A})=\begin{cases}1，当\ a=1\\3，当\ a=-\dfrac{1}{3}\\4，当\ a\neq1\ 且\ a\neq-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$