第 3 章习题答案

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 1, 0)$，求 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

解：

$$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 0)-(0, 1, 2)=(2-0, 1-1, 0-2)=(2, 0, -2)$$

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3&=3(2, 1, 0)+2(0, 1, 2)-(3, 1, 0)=(6, 3, 0)+(0, 2, 4)+(-3, -1, 0)\\&=(6+0-3, 3+2-1, 0+4+0)=(3, 4, 4)\end{aligned}$$

2. 设 $2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=4(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 4, 1, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 2, 1, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2, 1, -3, 1)$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

解：

$$2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+3(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=4(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$$

$$2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}=4\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}$$

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}&=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3\\&=2(2, 4, 1, 3)+3(1, 2, 1, 3)-4(2, 1, -3, 1)\\&=(4, 8, 2, 6)+(3, 6, 3, 9)+(-8, -4, 12, -4)\\&=(4+3-8, 8+6-4, 2+3+12, 6+9-4)\\&=(-1, 10, 17, 11)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{3}(-1, 10, 17, 11)=\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{17}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

3. 判断下列命题是否正确.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，那么其中每个向量可用其他向量线性表示.

(2) 如果向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，那么 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也线性相关.

(3) 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示且表示式是唯一的，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

(4) 如果当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$ 时才有

$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，

那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

(5) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$ 也线性相关，就有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m$.

解：

(1) 错误. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不可用其他向量线性表示.

(2) 错误. $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 0)$，向量 $\boldsymbol{\beta}_1$ 可经向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，但 $\boldsymbol{\beta}_1$ 并不线性相关.

(3) 正确. 反证法，设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 并非线性无关，且向量 $\boldsymbol{\beta}$ 经 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的唯一线性表示式为：$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$，则有不全为 0 的数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$，使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$，这样我们得到向量 $\boldsymbol{\beta}$ 经 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的另一种线性表示式 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+\mathbf{0}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m+\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m$，即 $\boldsymbol{\beta}=(k_1+\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m+$

$\lambda_m)\boldsymbol{\alpha}_m$，这与向量$\boldsymbol{\beta}$可经向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示且表示式是唯一的矛盾.

(4)错误. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2)$，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2=(1,0)$，当且仅当$\lambda_1=\lambda_2=0$时才有$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$，但此时$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$并非线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$也并非线性无关.

(5)错误. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2)$，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}_2=(1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性相关，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$也线性相关，但没有不全为0的数$\lambda_1$，$\lambda_2$，使$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$.

4. 判断下列向量组的线性相关性.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,3)$；

解：

对任意的常数k_1，k_2，都有：

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=(2k_1-k_2,\ k_1+2k_2,\ 5k_1+3k_2)$

所以$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$，

当且仅当

$$\begin{cases}2k_1-k_2=0,\\k_1+2k_2=0,\\5k_1+3k_2=0,\end{cases}$$

即$k_1=k_2=0$，

所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$线性无关.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,5)$；

解：

对任意的常数k_1，k_2，k_3，都有：

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=(k_1+2k_2+4k_3,\ 2k_1+3k_2+5k_3)$

所以$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$

当且仅当

$$\begin{cases}k_1+2k_2+4k_3=0,\\2k_1+3k_2+5k_3=0,\end{cases}$$

由于$k_1=2$，$k_2=-3$，$k_3=1$满足上述的方程，

因此$2\boldsymbol{\alpha}_1+(-3)\boldsymbol{\alpha}_2+1\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

所以$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,2)$；

解：

对任意的常数k_1，k_2，k_3，都有：

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=(k_1+4k_2+k_3,\ k_1+k_2,\ k_1+2k_2+2k_3)$

所以$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，

当且仅当

$$\begin{cases}k_1+4k_2+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_1+2k_2+2k_3=0,\end{cases}$$

即$k_1=k_2=k_3=0$，

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 2, 1, 5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2, 0, 3, -1)$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1, 1, 0, 4)$.

解:

对任意的常数 k_1, k_2, k_3, k_4, 都有:

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=(k_1+2k_3+k_4,\ k_1+2k_2+k_4,\ 2k_1+k_2+3k_3,\ 2k_1+5k_2-k_3+4k_4)$

所以 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$,

当且仅当

$$\begin{cases} k_1+2k_3+k_4=0, \\ k_1+2k_2+k_4=0, \\ 2k_1+k_2+3k_3=0, \\ 2k_1+5k_2-k_3+4k_4=0, \end{cases}$$

由于 $k_1=-2$, $k_2=1$, $k_3=1$, $k_4=0$,

满足上述的方程,

因此 $(-2)\boldsymbol{\alpha}_1+1\boldsymbol{\alpha}_2+1\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

5. $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$, 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

证明:

因为 $1\boldsymbol{\beta}_1+(-1)\boldsymbol{\beta}_2+1\boldsymbol{\beta}_3+(-1)\boldsymbol{\beta}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$, 所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$, $\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

6. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r, 且其中每个向量都可经 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

证明:

由极大线性无关组定义, 只需验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

反证法. 假设 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大线性无关组不可能是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 本身, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的极大线性无关组中向量个数必然小于 r, 不妨设为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ $(t<r,\ i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_t\in\{1, 2, \cdots, r\})$, 显然向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 线性无关.

由极大线性无关组定义, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 中每个向量都可经 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 线性表示, 又由题目已知, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可经 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都可经 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 线性表示, 又因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 线性无关, 所以由极大线性无关组定义, $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个极大线性无关组, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩为 $t<r$, 与题目已知 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r 矛盾.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.

7. 求下列向量组的秩与一个极大线性无关组.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(4, -1, -5)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -3, -4)$;

解：

把向量组作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&-1&-3\\1&-5&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&-9&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

易见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{B}$ 的第 1，2 列线性无关，由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，故与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2 列线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是该向量组的一个极大线性无关组.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,-1,0)$；

解：

把向量组作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&4&1&2\\2&-1&-3&1\\1&-5&-4&-1\\3&-6&-7&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_1+r_3\\-3r_1+r_4}]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&-9&-5&-3\\0&-9&-5&-3\\0&-18&-10&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_4]{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&4&1&2\\0&-9&-5&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

易见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，$\boldsymbol{B}$ 的第 1，2 列线性无关，由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，故与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2 列线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是该向量组的一个极大线性无关组.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

解：

把向量组作为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-2r_1+r_3\\-4r_1+r_4}]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&3&3&0&3\\0&1&1&0&1\\0&2&2&-4&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_3+r_4]{-3r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&-4&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

易见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，$\boldsymbol{B}$ 的第 1，2，4 列线性无关，由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，故与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2，4 列线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 是该向量组的一个极大线性无关组.

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 秩相同，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 能经 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

证明：设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 秩均为 r，则不妨设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 各自的一个极大线性无关组分别为：$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$，

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_r \in \{1, 2, \cdots, m\}$, $j_1, j_2, \cdots, j_r \in \{1, 2, \cdots, s\}$. 于是有：

$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关, $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性无关；

$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 等价, $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

以下讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$.

因为 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的一个极大线性无关组，所以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 能经 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表示，又由题目已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 能经 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 也能经 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表示，综上得：

$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 能经 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表示.

又由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性无关可知, $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的一个极大线性无关组，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的秩为 r.

由教材 64 页推论，秩为 r 的向量组中任意含 r 个向量的线性无关的部分组都是极大线性无关组，所以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关且刚好含 r 个向量可知，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的一个极大线性无关组.

由性质 2, $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 作为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的两个极大线性无关组等价，又因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 等价, $\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 等价，所以由等价关系的传递性可知, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

9. 求下列矩阵的行向量组的一个极大线性无关组：

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$；

解：

把行向量组转置为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$设\ \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4r_1+r_4]{\substack{-2r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-4r_2+r_4]{-r_4+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{14}{5}r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{6}{5} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}$$

易见 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 4$, $\boldsymbol{B}$ 的第 1, 2, 3, 4 列线性无关，由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，故与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 1, 2, 3, 4 列线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大线性无关组.

（2）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 2 & 1 & 5 & -1\\2 & 0 & 3 & 1 & 3\\1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

解：

把行向量组转置为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$\text{设 } \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 2 & 1 & 5 & -1\\2 & 0 & 3 & 1 & 3\\1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\1 & 2 & 0 & 1\\2 & 1 & 3 & 0\\2 & 5 & 1 & 4\\1 & -1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_1+r_2\\-2r_1+r_3\\-2r_1+r_4\\-r_1+r_5}]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 2 & -2 & 0\\0 & 1 & -1 & -2\\0 & 5 & -3 & 2\\0 & -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}r_2\\-r_2+r_3\\-5r_2+r_4\\r_2+r_5}]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-r_3+r_5\\r_3\leftrightarrow r_4}]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & -2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

易见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=4$，$\boldsymbol{B}$ 的第 1，2，3，4 列线性无关，由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，故与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2，3，4 列线性无关，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为一个极大线性无关组.

10. 集合 $\boldsymbol{V}=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$ 是否构成向量空间？为什么？

解：

集合 $\boldsymbol{V}=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$ 构成向量空间. 以下给出证明.

因为 $\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}0}=0$，所以零向量 $(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\text{个}0})\in\boldsymbol{V}$，所以 $\boldsymbol{V}$ 非空.

对于 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{\beta}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in\boldsymbol{V}$ 和常数 k 有：

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，$y_1+y_2+\cdots+y_n=0$

所以有：

$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)=0$，$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n=0$

所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)\in\boldsymbol{V}$

向量 $k\boldsymbol{\alpha}=(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)\in\boldsymbol{V}$

由定义 3. 14，集合 $\boldsymbol{V}$ 构成向量空间.

11. 试证：由 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 1, 1)$ 生成的向量空间恰为 $\mathbf{R}^3$.

证明：

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1 \in \mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{\alpha}_2 \in \mathbf{R}^3$，$\boldsymbol{\alpha}_3 \in \mathbf{R}^3$，所以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \subseteq \mathbf{R}^3$.

反之，任取 $\mathbf{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{\beta}=(x_1, x_2, x_3)$，容易得出：

$$\boldsymbol{\beta}=(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3$$

所以 $\boldsymbol{\beta} \in L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，于是有 $\mathbf{R}^3 \subseteq L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$.

综上有：

$L(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{R}^3$.

12. 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 1, 1, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 4, 3, 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1, 1, 2, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(4, 5, 6, 4)$ 所生成的向量空间的一组基及其维数.

解：

把行向量组转置为列向量组成矩阵 $\boldsymbol{A}$，利用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$：

$$\text{设 } \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_5^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&1&3&1&4\\2&1&4&1&5\\1&1&3&2&6\\0&2&4&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&1&3&1&4\\0&-1&-2&-1&-3\\0&0&0&1&2\\0&2&4&1&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_4}\begin{pmatrix}1&1&3&1&4\\0&-1&-2&-1&-3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&1&3&1&4\\0&-1&-2&-1&-3\\0&0&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

易见 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，$\boldsymbol{B}$ 的第 1，2，4 列线性无关，由于 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的对应的列向量组有相同的线性组合关系，故与其对应的 $\boldsymbol{A}$ 的第 1，2，4 列线性无关.

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_5$ 生成的向量空间的一组基，其维数为 3.

13. 在 $\mathbf{R}^3$ 中求一个向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使它在下面两个基

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 1, 1)$；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=(1, 0, 1)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, -1, 0)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1, 1, 1)$.

下有相同的坐标.

解：

设 $\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3$，则有：

$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\beta}_1)+x_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\beta}_2)+x_3(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\beta}_3)=\mathbf{0}$

展开得：

$x_2(-2, 1, 0)+x_3(-1, 0, 0)=\mathbf{0}$

取 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=0$ 即可，也就是说：

$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(1, 0, 1)$