

第4章习题答案

1. 用消元法解下列线性方程组.

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10; \end{cases}$$

解:

用消元法求解线性方程组:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10, \end{cases} \xrightarrow{\text{第一个方程与第二个方程互换}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10 \end{cases} \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{第一个方程两边同乘}-2\text{ 加到第二个方程} \\ \text{第二个方程两边同乘}-5\text{ 加到第三个方程} \end{array}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ -2x_2 - 7x_3 = -16, \\ -12x_2 - 19x_3 = -50, \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{第二个方程两边同乘}-6\text{ 加到第三个方程}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ -2x_2 - 7x_3 = -16, \\ 23x_3 = 46, \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{第三个方程两边同乘}\frac{1}{23}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ -2x_2 - 7x_3 = -16, \\ x_3 = 2, \end{cases} \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{第三个方程两边同乘}-5\text{ 加到第一个方程} \\ \text{第三个方程两边同乘}7\text{ 加到第二个方程} \end{array}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ -2x_2 = -2, \\ x_3 = 2, \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{第二个方程两边同乘}-\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2, \end{cases} \\ & \xrightarrow{\text{第二个方程两边同乘}-3\text{ 加到第一个方程}} \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

即得原方程的解: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$.

$$(2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$$

解：

用消元法求解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第一个方程两边同乘-3 加到第二个方程} \\ \text{第一个方程两边同乘-2 加到第三个方程} \\ \text{第一个方程两边同乘-2 加到第四个方程} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ -6x_2 + 4x_3 - x_4 = -13, \\ -5x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -16, \\ -3x_2 + 6x_3 - 8x_4 = -14, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第二个方程两边同乘-6 加到第三个方程} \\ \text{第二个方程两边同乘-8 加到第四个方程} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ -6x_2 + 4x_3 - x_4 = -13, \\ 31x_2 - 21x_3 = 62, \\ 45x_2 - 26x_3 = 90, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第三个方程两边同乘} -\frac{45}{31} \text{加到第四个方程} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 9, \\ -6x_2 + 4x_3 - x_4 = -13, \\ 31x_2 - 21x_3 = 62, \\ \frac{139}{31}x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第四个方程两边同乘} \frac{31}{139} \\ \text{第四个方程两边同乘 1 加到第一个方程} \\ \text{第四个方程两边同乘 -4 加到第二个方程} \\ \text{第四个方程两边同乘 21 加到第三个方程} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 9, \\ -6x_2 - x_4 = -13, \\ 31x_2 = 62, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第三个方程两边同乘} \frac{1}{31} \\ \text{第三个方程两边同乘 -3 加到第一个方程} \\ \text{第三个方程两边同乘 6 加到第二个方程} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_4 = 3, \\ -x_4 = -1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第二个方程两边同乘-1} \\ \text{第二个方程两边同乘-2 加到第一个方程} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_4 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{第二个方程和第三个方程互换} \\ \text{第三个方程和第四个方程互换} \end{array} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1, \end{cases}$$

得原方程的解: $x_1=1, x_2=2, x_3=0, x_4=1$.

2. 求下列齐次线性方程组的基础解系, 并写出通解.

$$(1) \begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_3=0, \\ 4x_1+7x_2-7x_3=0; \end{cases}$$

解:

对齐次线性方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 将 A 化为行最简形:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -4r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2 \\ -2r_2+r_1 \\ r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $R(A)=2<3$, 已知方程组有非零解, 且有 $3-2=1$ 个自由未知量, 其同解方程组为:

$$\begin{cases} x_1+7x_3=0 \\ x_2-5x_3=0 \end{cases}$$

取 x_3 为自由未知量, 得:

$$\begin{cases} x_1=-7x_3 \\ x_2=5x_3 \end{cases}$$

令

$$x_3=1$$

得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

从而得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以, 已知方程组的通解为 $x=c\xi_1$ (其中 c 为任意常数).

$$(2) \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ 5x_1-5x_2+8x_3-3x_4=0; \end{cases}$$

解:

对齐次线性方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 将 A 化为行最简形:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 8 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3 \\ -5r_1+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & -7 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2+r_3 \\ -r_2+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $R(A) = 2 < 4$, 已知方程组有非零解, 且有 $4-2=2$ 个自由未知量, 其同解方程组

为:
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_4 = 0, \\ x_2 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{7}{5}x_4 = 0, \end{cases}$$

取 x_3, x_4 为自由未知量, 得:
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}x_3 - \frac{4}{5}x_4, \\ x_2 = \frac{7}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4, \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}$,

从而得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$,

所以, 已知方程组的通解为 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ (其中 c_1, c_2 为任意常数).

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0; \end{cases}$$

解:

对齐次线性方程组的系数矩阵 A 作初等行变换, 将 A 化为行最简形

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}r_3 \\ 5r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -19 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \frac{1}{6}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{19}{6} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2+r_1 \\ -r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{19}{6} \end{pmatrix}$$

得 $R(A) = 3 < 5$, 已知方程组有非零解, 且有 $5-3=2$ 个自由未知量, 其同解方程组

为:
$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 8x_5 = 0, \\ x_2 + \frac{1}{6}x_5 = 0, \\ x_3 + x_4 - \frac{19}{6}x_5 = 0, \end{cases}$$

取 x_4, x_5 为自由未知量, 得:
$$\begin{cases} x_1 = -x_4 - 8x_5, \\ x_2 = -\frac{1}{6}x_5, \\ x_3 = -x_4 + \frac{19}{6}x_5, \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -48 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$,

从而得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -48 \\ -1 \\ 19 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$,

所以, 已知方程组的通解为 $\mathbf{x} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ (其中 c_1, c_2 为任意常数).

(4)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

解:

对齐次线性方程组的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 作初等行变换, 将 $\mathbf{A}$ 化为行最简形

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2+r_1 \\ -r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $R(\mathbf{A}) = 2 < 5$, 已知方程组有非零解, 且有 $5 - 2 = 3$ 个自由未知量, 其同解方程组

为:
$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$$

取 x_3, x_4, x_5 为自由未知量, 得:
$$\begin{cases} x_1 = 5x_3 - 7x_4 + 4x_5, \\ x_2 = -3x_3 + 5x_4 - x_5, \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$,

从而得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以, 已知方程组的通解为 $\mathbf{x} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$ (其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数).

3. 解下列非齐次线性方程组.

(1)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$$

解:

对线性方程组的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换, 将 $\tilde{\mathbf{A}}$ 化成行最简形

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -2r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{-2r_2+r_1 \\ 3r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3+r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多组解, 与已知方程组同解的方程组为:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_4 = 2, \\ x_2 - 9x_4 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = -2, \end{cases} \text{ 取 } x_4 \text{ 为自由未知量, 得 } \begin{cases} x_1 = 2 + 4x_4, \\ x_2 = -3 + 9x_4, \\ x_3 = -2 + 2x_4, \end{cases}$$

令 $x_4 = 0$, 得非齐次线性方程组的一个特解为: $\boldsymbol{\eta}_0 = (2, -3, -2, 0)^T$.

去掉 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的常数列 (最后一列), 得原方程组导出的齐次线性方程组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = (4, 9, 2, 1)^T$,

所以非齐次线性方程组的通解为: $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + c\boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c 为任意常数.

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$$

解:

对线性方程组的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换, 将 $\tilde{\mathbf{A}}$ 化成行最简形

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_3+r_1 \\ -3r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_2+r_1 \\ 2r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}r_1 \\ -2r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = 3 < 4$, 方程组有无穷多组解, 与已知方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{5}{3}x_4 = -\frac{2}{3} \\ x_3 = -2, \end{cases} \text{ 取 } x_4 \text{ 为自由未知量, 得 } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{3}x_4, \\ x_2 = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}x_4, \\ x_3 = -2, \end{cases}$$

令 $x_4 = 1$, 得非齐次线性方程组的一个特解为: $\boldsymbol{\eta}_0 = (-2, 1, -2, 1)^T$

去掉 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的常数列(最后一列), 得原方程组导出的齐次线性方程组的一个基础解系为 $\xi_1 = (-7, 5, 0, 3)^T$

所以非齐次线性方程组的通解为: $x = \eta_0 + c\xi_1$, 其中 c 为任意常数.

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

解:

对线性方程组的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换, 将 $\tilde{\mathbf{A}}$ 化成行最简形

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_3 \\ -r_2+r_4 \\ -2r_1+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{3}r_3 \\ r_3+r_2 \\ 2r_3+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_4+r_2 \\ -r_3+r_1 \\ \frac{1}{3}r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_4+r_1 \\ r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$R(\mathbf{A}) = R(\tilde{\mathbf{A}}) = 3 = 3$, 方程组有唯一解, 与已知方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

令

$$\eta_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

得非齐次方程组的通解为 $x = \eta_0$.

$$(4) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 1, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$$

解:

对线性方程组的增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换, 将 $\tilde{\mathbf{A}}$ 化成行最简形

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_3+r_4 \\ -r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{\begin{matrix} -r_3+r_1 \\ -3r_3+r_2 \\ -r_3+r_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & -2 & -30 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -18 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{18}r_4 \\ 8r_4+r_1 \\ 30r_4+r_2 \\ -9r_4+r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{2}r_1 \\ r_1+r_2 \\ -r_1+r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{2}r_2 \\ -r_2+r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$R(A)=R(\tilde{A})=4<5$, 方程组有无穷多组解, 与已知方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_2 = -1, \\ -\frac{11}{2}x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + \frac{7}{2}x_3 = 1, \\ x_5 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } x_3 \text{ 为自由未知量, 得 } \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{7}{2}x_3, \\ x_2 = -1, \\ x_4 = \frac{11}{2}x_3, \\ x_5 = 0, \end{cases}$$

令 $x_3 = 2$, 得非齐次线性方程组的一个特解为: $\eta_0 = (-6, -1, 2, 11, 0)^T$.

去掉 $\tilde{A}$ 的常数列 (最后一列), 得原方程组导出的齐次线性方程组的一个基础解系为 $\xi_1 = (-7, 0, 2, 11, 0)^T$

所以非齐次线性方程组的通解为: $x = \eta_0 + c\xi_1$, 其中 c 为任意常数.

4. 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \end{cases}$$

(1) 求线性方程组的通解;

(2) 求线性方程组满足条件 $2x_3 - x_4 = 0$ 的全部解.

解:

(1) 对线性方程组的增广矩阵 $\tilde{A}$ 进行初等行变换, 将 $\tilde{A}$ 化成行最简形

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} 3r_1+r_2 \\ r_1+r_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{\begin{matrix} -r_2+r_3 \\ -\frac{1}{14}r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$R(A)=R(\tilde{A})=2<4$, 方程组有无穷多组解, 与已知方程组同解的方程组为

$$\begin{cases} x_1 + \frac{9}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -2, \end{cases} \quad \text{取 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量, 得 } \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = -2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \end{cases}$$

令 $x_3=x_4=0$, 得非齐次线性方程组的一个特解为: $\eta_0=(1, -2, 0, 0)^T$.

去掉 $\tilde{A}$ 的常数列(最后一列), 得原方程组导出的齐次线性方程组的一个基础解系为 $\xi_1=(-9, 1, 7, 0)^T$, $\xi_2=(1, -1, 0, 2)^T$,

所以非齐次线性方程组的通解为: $x=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

$$(2) \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{9}{7}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = -2 + \frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \end{cases} \quad \text{和 } 2x_3 - x_4 = 0 \text{ 联立: } \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{2}{7}x_3, \\ x_2 = -2 - \frac{6}{7}x_3, \\ x_4 = 2x_3, \end{cases} \quad \text{令 } \xi = (-2, -6, 7, 14)^T \text{ 得}$$

满足 $2x_3-x_4=0$ 的全部解为: $x=\eta_0+c\xi$, 其中 c 为任意常数.

5. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

当 λ 取何值时, 有非零解? 并求其通解.

解:

当它的系数矩阵的秩 r 小于未知数的个数 3, 也就是系数行列式为 0 时, 有非零解. 要使系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_3+r_1 \\ -r_3+r_2}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & \lambda-2 \\ 0 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda-2 \\ 1-\lambda & -3 \end{vmatrix} \\ = -(\lambda-2)(1-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=0$$

$\lambda=-1$ 或者 $\lambda=4$.

(1) 当 $\lambda=-1$ 时, 系数矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}r_3 \\ -r_3+r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应齐次线性方程组为: $\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3, \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3, \end{cases}$ 取 $x_3=2$, 得基础解系 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

此时通解为 $\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c_1 为任意常数.

(2) 当 $\lambda = 4$ 时, 系数矩阵为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{5}r_2 \\ 2r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应齐次线性方程组为: $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = -3x_3, \\ x_2 = -x_3, \end{cases}$ 取 $x_3 = 1$, 得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

此时通解为 $\mathbf{x} = c_2 \boldsymbol{\xi}_2$, 其中 c_2 为任意常数.

6. λ 取何值时, 非齐次线性方程组
$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

(1) 有唯一解? 并求解; (2) 无解; (3) 有无穷多组解? 并求解.

解:

(1) 由克莱姆法则, 系数行列式 $D \neq 0$ 时有唯一解.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2+r_1 \\ -r_2+r_3}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_1+c_2 \\ c_3+c_2}} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 非齐次线性方程组有唯一解. 此时对增广矩阵 $\widetilde{\mathbf{A}}$ 作初等行变换得:

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_2+r_1 \\ -r_2+r_3}} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{\lambda-1}r_1 \\ \frac{1}{1-\lambda^3}r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{-(\lambda+1)r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ 0 & 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{\lambda+2}r_2 \\ r_2+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda+1}{\lambda+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda+2} \end{pmatrix}$$

得唯一解为:

$$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_2 = \frac{1}{\lambda+2}, x_3 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$$

(2) $\lambda = -2$ 时, 非齐次线性方程组为
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \end{cases}$$
 三个方程左右分别相加得 $0 = 3$, 这

显然是不可能成立的, 所以此时非齐次线性方程组无解.

$$(3) \lambda = 1 \text{ 时, 非齐次线性方程组为 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \text{ 即 } x_1 = 1 - x_2 - x_3, \text{ 此时显然有无穷多组} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$

解, 令 $\eta_0 = (1, 0, 0)^T$, $\xi_1 = (-1, 1, 0)^T$, $\xi_2 = (-1, 0, 1)^T$, 得通解为 $x = \eta_0 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

$$7. \text{ 设有线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - ax_3 + 15x_4 = 3, \\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 12x_4 = b, \end{cases} \text{ 问 } a, b \text{ 为何值时, 线性方程组}$$

(1) 有唯一解; (2) 无解; (3) 有无穷多解? 在有无穷多组解时, 求出其通解.

解:

由克莱姆法则, 系数行列式 $D \neq 0$ 时有唯一解.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & -a & 15 \\ 1 & -5 & -10 & 12 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3 \\ -r_1+r_4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -6-a & 6 \\ 0 & -6 & -12 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{2r_2+r_3 \\ 3r_2+r_4}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2-a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(2-a)$$

(1) 当 $a \neq 2$ 时, 线性方程组有唯一解; 当 $a = 2$ 时, 对增广矩阵 $\tilde{A}$ 作初等行变换得:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-r_1+r_2 \\ -3r_1+r_3 \\ -r_1+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & b-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2r_2+r_3 \\ 3r_2+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b+5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}r_2 \\ \frac{1}{2}r_3 \\ -3r_3+r_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

(2) 当 $a = 2$ 且 $b \neq 1$ 时, 线性方程组无解. 当 $a = 2$ 且 $b = 1$ 时, 进一步对增广矩阵变形得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-3r_3+r_1 \\ r_3+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{对应线性方程组 } \begin{cases} x_1 = -8, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_3 = 0 + 1x_3, \\ x_4 = 2, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1 = -8 + 0x_3, \\ x_2 = 3 - 2x_3, \\ x_3 = 0 + 1x_3, \\ x_4 = 2 + 0x_3, \end{cases} \text{ 令 } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \eta_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 得: (3) 当}$$

$a = 2$ 且 $b = 1$ 时, 线性方程组有无穷多组解, 通解为 $x = \eta_0 + c\xi_1$, 其中 c 为任意常数.

8. 设 n 阶矩阵 A 各行元素之和均为零, 且 $R(A) = n-1$, 求齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的全部解.

解:

因为 n 阶矩阵 A 各行元素之和均为零, 所以 $\xi_1 = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \uparrow 1})^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个解.

又由 $R(A) = n-1$ 得, 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系拥有 $n - R(A) = n - (n-1) = 1$ 个解向量, 显然这就是 $\xi_1 = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \uparrow 1})^T$, 所以齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的全部解为 $x = c\xi_1$, 其中 c 为任意常数.

9. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, 求一秩为 2 的 3 阶方阵 B , 使 $AB = O$.

解:

对齐次线性方程组 $AX = 0$ 的系数矩阵 A 做初等行变换化成行最简形:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2r_1+r_2 \\ -4r_1+r_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的线性方程组为 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, 即 $\begin{cases} x_1 = 1x_2 - 2x_3, \\ x_2 = 1x_2 + 0x_3, \\ x_3 = 0x_2 + 1x_3, \end{cases}$

显然其基础解系有两个解向量: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

于是可以设 3 阶方阵 $B = (\xi_1 \quad \xi_2 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 显然 $R(B) = 2$ 且 $AB = O$.

10. 已知 η_1, η_2, η_3 是三元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解, 且 $R(A) = 1$ 及

$$\eta_1 + \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_1 + \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

求: 方程组 $Ax = b$ 的通解.

解:

$$\eta_1 = \frac{1}{2}((\eta_1 + \eta_2) + (\eta_1 + \eta_3) - (\eta_2 + \eta_3)) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 3 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}$$

由线性方程组解的结构定理 2, 导出组基础解系含有 $n - R(A) = 3 - 1 = 2$ 个线性无关的解向量.

由性质 1, $\xi_1 = \eta_3 - \eta_1 = (\eta_2 + \eta_3) - (\eta_1 + \eta_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\xi_2 = \eta_1 - \eta_2 = (\eta_1 + \eta_3) - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ 都是导出组的解向量, 显然它们线性无关, 所以组成导出组的基础解系.

所以方程组 $Ax=b$ 的通解为:

$x = \eta_1 + c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$, 其中 c_1, c_2 为任意常数.

11. 已知齐次线性方程组 $Ax=0$ 通解为:

$$\xi = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

求此线性方程组.

解:

$$\text{在通解 } \xi = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 中, 设 } \xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, c_1 = x_1, c_2 = x_2, \text{ 则有:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{对应线性方程组为: } \begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 2x_1 - x_2, \\ x_4 = 3x_1 + x_2, \end{cases}$$

整理得所求的齐次线性方程组为:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 若 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 问: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是否可作为方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

解:

$$\text{因为 } \alpha_1 = -\frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_3 + \frac{1}{3}\beta_4, \alpha_2 = -\frac{2}{3}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_3 + \frac{1}{3}\beta_4,$$

$$\alpha_3 = -\frac{2}{3}\beta_3 + \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_4, \alpha_4 = -\frac{2}{3}\beta_4 + \frac{1}{3}\beta_1 + \frac{1}{3}\beta_2 + \frac{1}{3}\beta_3, \text{ 所以向量组 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

和向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 可以互相线性表示, 所以它们等价.

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系, 所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 其秩为 4. 由于等价向量组有相同的秩, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的秩自然也为 4, 所以向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 也线性无关.

而任意一个 $Ax=0$ 的解可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 又可由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性表示, 所以任意一个 $Ax=0$ 的解可以由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性表示.

由定义 2, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 可以作为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系.

13. 设有四元齐次线性方程组 (I): $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases}$ 和 (II): $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$

(1) 分别求方程组 (I) 和方程组 (II) 的基础解系;

(2) 求方程组 (I) 和方程组 (II) 的公共解.

解:

$$(1) (I): \begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1x_2+0x_3, \\ x_2=1x_2+0x_3, \\ x_3=0x_2+1x_3, \\ x_4=1x_2+0x_3, \end{cases} \text{ 所以其基础解系为 } \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(II): \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_3+x_4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1x_2-1x_3, \\ x_2=1x_2+0x_3, \\ x_3=0x_2+1x_3, \\ x_4=-1x_2+1x_3, \end{cases} \text{ 所以其基础解系为 } \xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \xi_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 设公共解为 $\xi = a\xi_1 + b\xi_2 = a\xi_3 + b\xi_4$, 展开得:

$$\begin{pmatrix} -a \\ a \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a \\ b \\ -a+b \end{pmatrix} \text{ 于是有: } b=2a.$$

$$\text{所以公共解为: } \xi = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } a \text{ 为任意常数.}$$

14. 设 $\alpha = (1, 2, 1)^T$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, $\gamma = (0, 0, 8)^T$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$, 求解方程

$$2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma.$$

解:

$$B = \beta^T\alpha = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A^2 = (\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T) = \alpha(\beta^T\alpha)\beta^T = 2\alpha\beta^T = 2A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (2A)^2 = 4A^2 = 4(2A) = 8A$$

$$2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$$

$$16Ax = 8Ax + 16x + \gamma$$

$$(8A - 16E)x = \gamma$$

$$8A = 8\alpha\beta^T = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 16 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}, 8A - 16E = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 16 & -8 & 0 \\ 8 & 4 & -16 \end{pmatrix}$$

对增广矩阵施行初等行变换为行最简形:

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & -16 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+r_3]{2r_1+r_2} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4r_3+r_1]{\frac{1}{8}r_3} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{-\frac{1}{8}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{1}{2}, \\ x_2 - 2x_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + 1x_3, \\ x_2 = 1 + 2x_3, \\ x_3 = 0 + 1x_3, \end{cases} \quad \text{令 } \boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 得方程组通解为:}$$

$\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + c\boldsymbol{\xi}_1$, 其中, c 为任意常数.

15. 已知两个线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3; \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + mx_2 - x_3 - x_4 = -5, \\ nx_2 - x_3 - 2x_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = 1 - t, \end{cases}$$

(1) 求方程组 (I) 的通解;

(2) 问: 当方程组 (II) 中的参数 m, n, t 为何值时, (I) 与 (II) 同解?
解:

(1) 对增广矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行初等行变换变为行最简形:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1+r_3]{-4r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 7 & 25 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-4r_2+r_3]{r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_3]{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = -2 \\ x_2 - x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 1x_4 \\ x_2 = -4 + 1x_4 \\ x_3 = -5 + 2x_4 \\ x_4 = 0 + 1x_4 \end{cases} \quad \text{令 } \boldsymbol{\eta}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ 得:}$$

方程组 (I) 的通解为: $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + c\boldsymbol{\xi}_1$, 其中 c 为任意常数.

(2) 如果 (I) 与 (II) 同解, 则 (I) 的特解 $\boldsymbol{\eta}_0$ 一定是 (II) 的解, 所以有:

$$\begin{cases} -2 - 4m - (-5) = -5, \\ -4n - (-5) = -11, \\ (-5) = 1 - t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2, \\ n = 4, \\ t = 6, \end{cases} \text{ 将其代入 (II) 得增广矩阵 } \tilde{\mathbf{B}}, \text{ 初等行变换变为行最简形:}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_2+r_1]{\frac{1}{4}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

容易看出 $\tilde{\mathbf{B}}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}$ 行最简形完全相同, 所以此时 (I) 与 (II) 同解.

综上, 当 $m=2, n=4, t=6$ 时, (I) 与 (II) 同解.

16. 设向量组 $\alpha_1=(1, 0, 0, 3), \alpha_2=(1, 1, -1, 2), \alpha_3=(1, 2, a-3, 1), \alpha_4=(1, 2, -2, a), \beta=(0, 1, b, -1)$. 问:

(1) a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 唯一线性表出?

(2) a, b 为何值时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出?

(3) a, b 为何值时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 且该表出不唯一? 并写出该表出式.

解:

设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$, 于是我们得到关于 x_1, x_2, x_3, x_4 的线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_2+2x_3+2x_4=1, \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b, \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1, \end{cases}$$

(1) 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{-3r_1+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & a-3 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_2+r_4]{r_2+r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$$

所以当 $a \neq 1$ 时, $D \neq 0$, 由克莱姆法则, 线性方程组有唯一解, 所以此时 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 唯一线性表出.

(2) 当 $a=1$ 时, 对增广矩阵 $\tilde{A}$ 作初等行变换化成行最简形:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3r_1+r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow[r_2+r_4]{\begin{matrix} -r_2+r_1 \\ r_2+r_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

容易看出当 $a=1$ 且 $b \neq -1$ 时, 增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩为 3, 系数矩阵 A 的秩为 2, 两者不相同, 此时线性方程组无解, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出.

(3) 当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时, 由(2)增广矩阵 $\tilde{A}$ 的行最简形解得: $\begin{cases} x_1 = -1+x_3+x_4, \\ x_2 = 1-2x_3-2x_4. \end{cases}$

此时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 且该表出不唯一, 表出式为:

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = (-1+x_3+x_4)\alpha_1 + (1-2x_3-2x_4)\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$$

其中, x_3, x_4 为任意常数.

17. 设 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系. 证明:

(1) $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;

(2) $\eta^*, \eta^*+\xi_1, \dots, \eta^*+\xi_{n-r}$ 线性无关.

证明:

(1) 反证法. 因为 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组的一个基础解系, 所以由基础解系定义知 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关. 如果 $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性相关, 则向量 η^* 可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表示, 且表示式是唯一的. 设表示式为:

$$\eta^* = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r},$$

于是由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系有: $A\eta^* = A(k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}) = k_1(A\xi_1) + k_2(A\xi_2) + \dots + k_{n-r}(A\xi_{n-r}) = k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 0 + \dots + k_{n-r} \cdot 0 = 0$,

这与 η^* 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的一个解矛盾.

(2) 设 $k_0 \eta^* + k_1(\eta^* + \xi_1) + \dots + k_{n-r}(\eta^* + \xi_{n-r}) = 0$, 则有:

$$(k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r})\eta^* + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} = 0$$

由(1)结论, $\eta^*, \xi_1, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关, 所以有:

$$k_0 + k_1 + \dots + k_{n-r} = k_1 = \dots = k_{n-r} = 0, \text{ 于是有:}$$

$$k_0 = k_1 = \dots = k_{n-r} = 0$$

所以 $\eta^*, \eta^* + \xi_1, \dots, \eta^* + \xi_{n-r}$ 线性无关.

18. 设 ξ 是 n 维列向量, 满足 $\xi^T \xi = 1$, 记 $A = E_n - \xi \xi^T$, 证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 必有非零解.

证明:

因为 ξ 是 n 维列向量, 满足 $\xi^T \xi = 1$, 所以 ξ 为非零向量.

由 $A\xi = (E_n - \xi \xi^T)\xi = E_n \xi - \xi \xi^T \xi = \xi - \xi(\xi^T \xi) = \xi - \xi \cdot 1 = 0$ 可知, 非零向量 ξ 就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的非零解.

19. 证明: 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_3 - x_4 = a_3 \\ x_4 - x_5 = a_4 \\ x_5 - x_1 = a_5 \end{cases}$$

有解的充要条件是 $\sum_{i=1}^5 a_i = 0$, 并在有解的情形时, 求出它的一般解.

解:

对增广矩阵 $\tilde{A}$ 进行初等行变换化成行最简形:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[i=1,2,3,4]{r_i + r_5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^5 a_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \xrightarrow{r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^5 a_i \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^5 a_i \end{pmatrix} \\
& \xrightarrow{r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & a_2 + a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & a_3 + a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^5 a_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

显然, 当且仅当 $\sum_{i=1}^5 a_i = 0$ 时, 系数矩阵 A 的秩和增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩相等, 所以线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1, \\ x_2 - x_3 = a_2, \\ x_3 - x_4 = a_3, \\ x_4 - x_5 = a_4, \\ x_5 - x_1 = a_5, \end{cases} \text{有解的充要条件是 } \sum_{i=1}^5 a_i = 0, \text{ 此时方程为: } \begin{cases} x_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + x_5, \\ x_2 = a_2 + a_3 + a_4 + x_5, \\ x_3 = a_3 + a_4 + x_5, \\ x_4 = a_4 + x_5, \\ x_5 = x_5, \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{\eta}_0 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4, a_2 + a_3 + a_4, a_3 + a_4, a_4, 0)^T$, $\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ 得一般解为:
 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}_0 + c\boldsymbol{\xi}_1$, 其中, c 为任意常数.