第 5 章习题答案

1. 判断下列命题是否正确.

(1) 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(2) 如果 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量;

(3) 实矩阵的特征值一定是实数.

解:

(1) 错误. 当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，无论 λ 取何值，都有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，但此时 $\boldsymbol{x}$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(2) 错误. 理由同上，只有当 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r\neq 0$ 时，它才是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 λ 的特征向量.

(3) 错误. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则特征方程为 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$，此时特征值为 $\lambda_{1,2}=\pm i$，都不是实数. 只有实对称矩阵，才能保证特征值一定是实数.

2. 求下列矩阵的特征值和特征向量.

(1) $\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$;

解:

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -3\\ -3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)-(-3)(-3)=\lambda^2-3\lambda-7=0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$.

当 $\lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$ 时，解方程 $\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得:

$$\begin{pmatrix}2-\dfrac{3-\sqrt{37}}{2} & -3\\ -3 & 1-\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

可得 $(\sqrt{37}+1)x_1=6x_2$，所以对应的特征向量可取为:

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}6\\ \sqrt{37}+1\end{pmatrix}$$

所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$ 为 $\lambda_1=\dfrac{3-\sqrt{37}}{2}$ 对应的全部特征向量;

当 $\lambda_2=\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}$ 时，解方程 $\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{3+\sqrt{37}}{2}\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得:

$$\begin{pmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{37}}{2} & -3 \\ -3 & 1-\frac{3+\sqrt{37}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

可得$(1-\sqrt{37})x_1=6x_2$，所以对应的特征向量可取：

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 6 \\ 1-\sqrt{37} \end{pmatrix}$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq0)$ 为 $\lambda_2=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$对应的全部特征向量.

(2) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$；

解：

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}\xlongequal{-r_3+r_1}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2+\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_3}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ 4 & 2 & 10-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 10-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(11-\lambda)=0$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=11$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解方程$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得：

$$\begin{pmatrix} 6-2 & 2 & 4 \\ 2 & 3-2 & 2 \\ 4 & 2 & 6-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，可得\begin{cases} x_1=1x_1+0x_3, \\ x_2=-2x_1-2x_3, \\ x_3=0x_1+1x_3, \end{cases}$$

所以对应的特征向量可取：

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2(k_1^2+k_2^2\neq0)$ 为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应的全部特征向量.

当 $\lambda_3=11$ 时，解方程$(\boldsymbol{A}-11\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得：

$$\begin{pmatrix} 6-11 & 2 & 4 \\ 2 & 3-11 & 2 \\ 4 & 2 & 6-11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，可得\begin{cases} x_1=2x_2, \\ x_2=1x_2, \\ x_3=2x_2, \end{cases}$$

所以对应的特征向量可取：

$$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

所以 $k_3\boldsymbol{p}_3(k_3\neq 0)$ 为 $\lambda_3=11$ 对应的全部特征向量.

(3) $\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$;

解:

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&0-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{沿第二行展开}}(-1)^{2+1}(-2)\begin{vmatrix}-2&0\\-2&-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}(-2)\begin{vmatrix}2-\lambda&-2\\0&-2\end{vmatrix}$$

$$=4\lambda+(1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)+(4\lambda-8)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)=(\lambda+2)(1-\lambda)(\lambda-4)$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=4$.

当 $\lambda_1=-2$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得:

$$\begin{pmatrix}2+2&-2&0\\-2&1+2&-2\\0&-2&0+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \text{即}\begin{cases}x_1=1x_1\\x_2=2x_1\\x_3=2x_1\end{cases}, \text{所以对应的特征向量可取为 } \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},$$

所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$ 为 $\lambda_1=-2$ 对应的全部特征向量.

当 $\lambda_2=1$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得:

$$\begin{pmatrix}2-1&-2&0\\-2&1-1&-2\\0&-2&0-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \text{即}\begin{cases}x_1=2x_2\\x_2=1x_2\\x_3=-2x_2\end{cases}, \text{所以对应的特征向量为 } \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$ 为 $\lambda_2=1$ 对应的全部特征向量.

当 $\lambda_3=4$ 时, 解方程 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 得:

$$\begin{pmatrix}2-4&-2&0\\-2&1-4&-2\\0&-2&0-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \text{即}\begin{cases}x_1=2x_3,\\x_2=-2x_3,,\\x_3=1x_3,\end{cases} \text{所以对应的特征向量为 } \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},$$

所以 $k_3\boldsymbol{p}_3(k_3\neq 0)$ 为 $\lambda_3=4$ 对应的全部特征向量.

(4) $\begin{pmatrix}2&3&-1&-4\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-2\\0&1&1&2\end{pmatrix}$.

解:

$\boldsymbol{A}$ 的特征方程为:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\text{沿第一行展开}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2} (2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{-c_2+c_1} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{沿第一行展开}} (2-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^3$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\lambda_4=2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得：

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1-1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{得}\begin{cases} x_1 = 4x_3, \\ x_2 = -1x_3, \\ x_3 = 1x_3, \\ x_4 = 0x_3, \end{cases} \text{对应的特征向量为 } \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$ 为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的全部特征向量.

当 $\lambda_4=2$ 时，解方程$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得：

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -1-2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2-2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}，\text{即}\begin{cases} x_1 = 1x_1, \\ x_2 = 0x_1, \\ x_3 = 0x_1, \\ x_4 = 0x_1, \end{cases} \text{对应的特征向量为 } \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$ 为 $\lambda_4=2$ 对应的全部特征向量.

3. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=-1$，对应的特征向量依次为：

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解：

令矩阵 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则有：

$$(\boldsymbol{X} \vdots \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-2r_1+r_2]{-r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{2r_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_2]{-3r_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2r_3+r_1]{9r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}9&18&0&5&-2&4\\0&18&0&4&-4&2\\0&0&9&-2&-1&2\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{-r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}9&0&0&1&2&2\\0&9&0&2&-2&1\\0&0&9&-2&-1&2\end{array}\right)=(9\boldsymbol{E}\vdots 9\boldsymbol{X}^{-1})$$

所以有：$\boldsymbol{X}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}$

由特征值和特征向量定义得：

$$\boldsymbol{AX}=(\boldsymbol{Ax}_1,\ \boldsymbol{Ax}_2,\ \boldsymbol{Ax}_3)=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ \lambda_2\boldsymbol{x}_2,\ \lambda_3\boldsymbol{x}_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

所以有：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3&0&6\\0&3&6\\6&6&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&0\end{pmatrix}$$

4. 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，1，1，与特征值 -1 对应的特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解：

因为特征值 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的 2 重特征值，所以对应特征值 1 恰有 2 个线性无关的特征向量.

对应特征值 1 的特征向量必然与对应特征值 -1 的特征向量 $\boldsymbol{x}=(-1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 正交.

取与 $\boldsymbol{x}=(-1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 正交的线性无关的两个向量 $\boldsymbol{y}=(1,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{z}=(1,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}$，设它们都是对应特征值 1 的特征向量，于是我们有：

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{Ax},\ \boldsymbol{Ay},\ \boldsymbol{Az})=(-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$，即：

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

则有：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

容易验证，这样求出来的 $\boldsymbol{A}$ 是满足题意的.

5. 若 n 阶方阵满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵. 试证，幂等矩阵的特征值只可能是 1 或者是零.

证明：

任取幂等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 和对应的特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$.

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}$，于是有：

$\lambda\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{Ax})=\lambda(\lambda\boldsymbol{x})$

$(\lambda-\lambda^2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

因为特征向量 $\boldsymbol{x}$ 为非零向量，所以 $\lambda-\lambda^2=0$，因而幂等矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 只可能是 1 或者是 0.

6. 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能是±1.

证明：

任取 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 和对应的特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$.

因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{x}$，于是有：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Ax})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{x})=\lambda(\boldsymbol{Ax})=\lambda(\lambda\boldsymbol{x})$

$(1-\lambda^2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

因为特征向量 $\boldsymbol{x}$ 为非零向量，所以 $1-\lambda^2=0$，因而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 只可能是±1.

7. 设 λ_1，λ_2 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征根，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1，λ_2 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证明：

反证法.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应特征值 λ 的特征向量，则有：

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1，λ_2 的特征向量，所以有：

$\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$

综上有：

$\lambda(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$

$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$

又因为 λ_1，λ_2 是 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，所以 $\lambda-\lambda_1$ 和 $\lambda-\lambda_2$ 不可能同时为 0，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，这与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量矛盾.

8. 计算 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,3,-5)$，$\boldsymbol{\beta}=(4,-2,0,1)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{4},-1\right)$，$\boldsymbol{\beta}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-2,\sqrt{3},\frac{2}{3}\right)$.

解：

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=(-1)\times4+0\times(-2)+3\times0+(-5)\times1=-9$

(2) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times(-2)+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{3}+(-1)\times\frac{2}{3}=0$

9. 把下列向量单位化：

(1) $\boldsymbol{\alpha}=(3,0,-1,4)$；(2) $\boldsymbol{\alpha}=(5,1,-2,0)$.

解：

$$(1)\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}}=\frac{(3,0,-1,4)}{\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2+4^2}}=\left(\frac{3}{\sqrt{26}},0,-\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{4}{\sqrt{26}}\right)$$

$$(2)\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]}}=\frac{(5,1,-2,0)}{\sqrt{5^2+1^2+(-2)^2+0^2}}=\left(\frac{5}{\sqrt{30}},\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}},0\right)$$

10. 利用施密特正交化方法把下列向量组正交化.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

解：

取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$单位化即得：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0,1)$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1,0)$.

解：

取$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,1)$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0,1)-\frac{2}{3}(1,0,-1,1)=\left(\frac{1}{3},-1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=(-1,1,1,0)+\frac{2}{3}(1,0,-1,1)+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3},-1,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

再将$\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$单位化即得：

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{15}},\ -\frac{3}{\sqrt{15}},\ \frac{2}{\sqrt{15}},\ \frac{1}{\sqrt{15}}\right)$$

$$\boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{35}},\ \frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{4}{\sqrt{35}}\right)$$

11. 试证：若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则对于任意实数 k，l，有 $k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $l\boldsymbol{\beta}$ 正交.

证明：

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$，因而对于任意实数 k，l，由内积性质有：

$[k\boldsymbol{\alpha},l\boldsymbol{\beta}]=k[\boldsymbol{\alpha},l\boldsymbol{\beta}]=k[l\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=k(l[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}])=kl[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]=kl[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=kl\cdot 0=0$

所以 $k\boldsymbol{\alpha}$ 与 $l\boldsymbol{\beta}$ 正交.

12. 下列矩阵是否为正交矩阵？

(1)$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$；(2)$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

解：

(1)因为第 1 行向量的长度为$\sqrt{1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{7}{6}\neq 1$，

所以该矩阵不是正交矩阵；

(2)

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$$

所以由正交矩阵定义，该矩阵为正交矩阵.

13. 设 $\boldsymbol{x}$ 为 n 维列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，求证 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

证明：

因为 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=H$，所以 H 是对称矩阵，并且有：

$$H^TH=(E-2xx^T)(E-2xx^T)=E-2xx^TE-E\cdot 2xx^T+(2xx^T)(2xx^T)$$
$$=E-2xx^T-2xx^T+4x(x^Tx)x^T=E-4xx^T+4x\cdot 1\cdot x^T=E$$

所以由正交矩阵定义，H 是对称的正交矩阵.

14. 设 A 与 B 都是 n 阶正交矩阵，证明 AB 也是正交矩阵.

证明：

因为 A 与 B 都是 n 阶正交矩阵，所以 $A^TA=B^TB=E$，于是有：

$$(AB)^T(AB)=(B^TA^T)(AB)=B^T(A^TA)B=B^TEB=B^TB=E$$

所以 AB 也是正交矩阵.

15. 求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵：

(1) $A=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&-3&4\\2&4&-3\end{pmatrix}$；

解：

特征方程为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}0-\lambda&-2&2\\-2&-3-\lambda&4\\2&4&-3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}-\lambda&-2&2\\-2&-3-\lambda&4\\0&1-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{-c_3+c_2}\begin{vmatrix}-\lambda&-4&2\\-2&-7-\lambda&4\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-4\\-2&-7-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+7\lambda-8)=-(\lambda-1)^2(\lambda+8)=0$$

求得 A 的特征值为 $\lambda_1=-8$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

对于 $\lambda_1=-8$，求解线性方程组 $(A+8E)x=\mathbf{0}$. 由：

$$A+8E=\begin{pmatrix}8&-2&2\\-2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{4r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&18&18\\-2&5&4\\0&9&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{18}r_1]{-\frac{1}{2}r_1+r_3}\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&5&4\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{-5r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&1&1\\-2&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$，单位化得：$\gamma_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=1$，求解线性方程组 $(A-E)x=\mathbf{0}$. 由：

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-4&4\\2&4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{-r_1}\begin{pmatrix}1&2&-2\\-2&-4&4\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，

正交化得：$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\dfrac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\dfrac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$，

单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}$.

以正交向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$ 为列向量的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 就是所求的正交矩阵，即：

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{3\sqrt5}\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt5}\begin{pmatrix}-\sqrt5&-6&2\\-2\sqrt5&3&4\\2\sqrt5&0&5\end{pmatrix}$$

此时有：

$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-8&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$为对角矩阵.

(2)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-3&2\\4&2&1\end{pmatrix}$；

解：

特征方程为：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&4\\2&-3-\lambda&2\\4&2&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{-r_1+r_3}\begin{vmatrix}1-\lambda&2&4\\2&-3-\lambda&2\\3+\lambda&0&-3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}5-\lambda&2&4\\4&-3-\lambda&2\\0&0&-3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda&2\\4&-3-\lambda\end{vmatrix}=(-3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-23)=(-3-\lambda)[\lambda-(1-2\sqrt6)][\lambda-(1+2\sqrt6)]$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=1-2\sqrt6$，$\lambda_3=1+2\sqrt6$.

对于 $\lambda_1=-3$，求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&2&4\\2&0&2\\4&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{pmatrix}4&2&4\\2&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=1,2]{\frac{1}{2}r_i}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=1-2\sqrt{6}$，求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-(1-2\sqrt{6})\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-(1-2\sqrt{6})\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2\sqrt{6}&2&4\\2&-4+2\sqrt{6}&2\\4&2&2\sqrt{6}\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_1}\begin{pmatrix}2\sqrt{6}-4&0&4-2\sqrt{6}\\2&-4+2\sqrt{6}&2\\4&2&2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2\sqrt{6}-4}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-4+2\sqrt{6}&2\\4&2&2\sqrt{6}\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4+2\sqrt{6}&4\\0&2&4+2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2-\sqrt{6})r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&2&4+2\sqrt{6}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2+\sqrt{6}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2-\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}\\\frac{-2-\sqrt{6}}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}\\\frac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=1+2\sqrt{6}$，求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-(1+2\sqrt{6})\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-(1+2\sqrt{6})\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2\sqrt{6}&2&4\\2&-4-2\sqrt{6}&2\\4&2&-2\sqrt{6}\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_3+r_1}\begin{pmatrix}-4-2\sqrt{6}&0&4+2\sqrt{6}\\2&-4-2\sqrt{6}&2\\4&2&-2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{-4-2\sqrt{6}}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-4-2\sqrt{6}&2\\4&2&-2\sqrt{6}\end{pmatrix}\xrightarrow[-4r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-4-2\sqrt{6}&4\\0&2&4-2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2+\sqrt{6})r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\0&2&4-2\sqrt{6}\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_2]{\frac{1}{2}r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2-\sqrt{6}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2+\sqrt{6}\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\\\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\\\dfrac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\end{pmatrix}$.

以正交向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$ 为列向量的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 就是所求的正交矩阵，即：

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\\ 0 & \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \dfrac{-2+\sqrt{6}}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3+\sqrt{6}}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3-\sqrt{6}}}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\sqrt{6} & \sqrt{3-\sqrt{6}} & \sqrt{3+\sqrt{6}}\\ 0 & -\sqrt{6+2\sqrt{6}} & \sqrt{6-2\sqrt{6}}\\ \sqrt{6} & \sqrt{3-\sqrt{6}} & \sqrt{3+\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

此时有：

$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 1-2\sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & 1+2\sqrt{6}\end{pmatrix}$为对角矩阵.

(3)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$；

解：

特征方程为：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & 0 & -1\\ 1 & 4-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4-\lambda & 1\\ -1 & 0 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_i+r_1}{\underset{i=2,\,3,\,4}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda\\ 1 & 4-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4-\lambda & 1\\ -1 & 0 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 4-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & 4-\lambda & 1\\ -1 & 0 & 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[r_1+r_4]{-r_1+r_2}(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3-\lambda & -2 & -1\\ 0 & -1 & 4-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & -2 & -1\\ -1 & 4-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=\!=}(4-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 0 & 4-\lambda\\ -1 & 4-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 4-\lambda & 1\\ 1 & 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}\overset{-c_1+c_3}{=\!=\!=}(4-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 1 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)^2((4-\lambda)^2-4)=(4-\lambda)^2(6-\lambda)(2-\lambda)=0$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=4$，$\lambda_4=6$.

对于 $\lambda_1=2$，求解线性方程组（$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{2r_4+r_1}\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&2&0&2\\0&-1&2&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[2r_3+r_2]{r_3+r_1}\begin{pmatrix}0&0&4&4\\0&0&4&4\\0&-1&2&1\\-1&0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-r_1+r_2\\-r_3\\-r_4}}\begin{pmatrix}0&0&4&4\\0&0&0&0\\0&1&-2&-1\\1&0&-1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}r_1\\2r_1+r_3\\r_1+r_4}}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\\1&0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2\leftrightarrow r_3\\r_3\leftrightarrow r_4}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=\lambda_3=4$，求解线性方程组（$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}$）$x=0$. 由：

$$\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\-1&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_4]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}0&1&0&-1\\1&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，因为它们已经正交，所以只需要单位化得：

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_4=6$，求解线性方程组（$\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}$）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&1&0&-1\\1&-2&-1&0\\0&-1&-2&1\\-1&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_4]{2r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&-3&-2&-1\\1&-2&-1&0\\0&-1&-2&1\\0&-2&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}r_4\\3r_4+r_1\\r_4+r_3}}\begin{pmatrix}0&0&-2&2\\1&-2&-1&0\\0&0&-2&2\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[2r_1+r_3]{\substack{-\frac{1}{2}r_1\\ r_1+r_2}}\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\1&-2&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_4+r_2}\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2\\ r_2\leftrightarrow r_4}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_4=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_4}{\|\boldsymbol{\alpha}_4\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

以正交向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$，$\boldsymbol{\gamma}_4$ 为列向量的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 就是所求的正交矩阵，即：

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3,\ \boldsymbol{\gamma}_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{2}&0&-1\\-1&0&\sqrt{2}&-1\\-1&\sqrt{2}&0&1\\1&0&\sqrt{2}&1\end{pmatrix}$$

此时有：

$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$为对角矩阵.

(4)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$.

解：

特征方程为：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{沿第二行展开}}(-2)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&0\\-2&1-\lambda\end{vmatrix}+(2-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3-\lambda&0\\0&1-\lambda\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3-\lambda&-2\\0&-2\end{vmatrix}$$

$$=2(-2)(1-\lambda)+(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)+2(3-\lambda)(-2)$$

$$\xlongequal{\text{第一项和第三项相加}}(-8)(2-\lambda)+(\lambda^2-4\lambda+3)(2-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3-8)=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)$$

求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$.

对于 $\lambda_1=-1$，求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&3&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}r_1+r_2}\begin{pmatrix}4&-2&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}4&0&-2\\0&2&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{\frac{1}{4}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\gamma_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_2=2$，求解线性方程组（$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2+r_3]{-\frac{1}{2}r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-4&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_3=5$，求解线性方程组（$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_2}\begin{pmatrix}-2&-2&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_2+r_3]{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}-2&0&4\\0&-1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$，单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

以正交向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，$\boldsymbol{\gamma}_3$ 为列向量的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 就是所求的正交矩阵，即：

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

此时有：

$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$为对角矩阵.

16. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(1)求 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$;

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

解:

(1)由教材 P106 推论, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ 与对角阵 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(-1, 2, y)$ 相似, 所以 -1, 2, y 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为:

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&0\\2&x-\lambda&2\\2&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)\begin{vmatrix}x-\lambda&2\\1&1-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2))=0$$

所以 -1, 2, y 都是特征方程的根.

对比得 $y=-2$, 且 $x-2=(-1)\cdot 2=-2$, 所以 $x=0$.

(2)由上小题结论, 知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值为: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-2$

对于 $\lambda_1=-1$, 求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&2\\2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[2r_1+r_2]{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}, \text{ 得 } \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_2=2$, 求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由:

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&0&0\\2&-2&2\\2&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[i=2,\ 3]{-\frac{1}{4}r_1,\ -2r_1+r_i}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{2r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}, \text{ 得 } \boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=-2$, 求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由:

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{2}r_2]{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{r_3+r_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}, \text{ 得 } \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&0&-2\\-2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

17. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&1\\0&-2&3\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

解:

特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&-1\\0&-\lambda&1\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=(1-\lambda)^2(2-\lambda)=$$

0，所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=2$.

对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\0&-2&2\end{pmatrix}\xrightarrow[2r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}，得 \boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}，\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda_3=2$，求解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由：

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-2&1\\0&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2+r_3]{-r_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}，得 \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

$$令 \boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}，则有 \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

$$所以有：\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

$$\boldsymbol{A}^{100}=\left(P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{100}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{100}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&-2^{100}\\0&1&2^{100}\\0&1&2\cdot2^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1-2^{100}&1-2^{100}\\0&2-2^{100}&-1+2^{100}\\0&2-2\cdot2^{100}&-1+2\cdot2^{100}\end{pmatrix}$$