第 6 章习题答案

1. 将下列二次型用矩阵形式表示.

(1)$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3+2x_3x_1$;

(2)$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$;

(3)$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=6x_1^2+3x_1x_2-2x_1x_3+5x_1x_4+2x_2^2-x_2x_4$.

解:

$$(1)f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3+2x_3x_1=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 3\\1 & 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$(2)f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$$

$$=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$(3)f(x_1, x_2, x_3, x_4)=6x_1^2+3x_1x_2-2x_1x_3+5x_1x_4+2x_2^2-x_2x_4$$

$$=(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix}6 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{5}{2}\\ \frac{3}{2} & 2 & 0 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

2. 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵.

解:

因为

$$f(x_1, x_2, x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3\\a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

所以二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix}$.

3. 当 t 为何值时，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$ 的秩为 2?

解:

要使 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$ 的秩为 2,

必须二次型对应的矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}$ 的秩为 2<3, 所以其行列式

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} \xlongequal[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & -5 \\ 0 & -5 & t-4 \end{vmatrix} = -8(t-4)-(-5)(-5) = -8t+7 = 0$$

所以 $t = \dfrac{7}{8}$.

反之，当 $t = \dfrac{7}{8}$ 时，容易验证 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$ 的秩为 2.

4. 已知二次型 $f = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 经过正交变换化为标准型 $f = y_2^2+2y_3^2$，求参数 a，b 及所用的正交变换矩阵.

解:

设 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{T}$ 为所用的正交变换矩阵，则有:

$$f = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3 = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= (y_1, y_2, y_3)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_2^2+2y_3^2$$

所以有: $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 正交相似，因而有相同的特征值 0, 1, 2. 于是有:

$$|\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)^2 = 0,\quad |\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & b \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} = 2ab = 0$$，因此有 $a = b = 0$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，正交化为 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \dfrac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，正交化为 $\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=2$ 时，解 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，正交化为 $\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

令 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 1 & 0\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，即为所用的正交变换矩阵.

5. 用配方法把下列二次型化为标准型，并求所作变换.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2-8x_3^2$；

解：

配方得：

$$f=2x_1x_2+4x_1x_3-x_2^2-8x_3^2=\frac{3}{2}x_1^2-(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)-\frac{1}{2}(x_1^2-8x_1x_3+16x_3^2)$$

$$=\frac{3}{2}x_1^2-(x_1-x_2)^2-\frac{1}{2}(x_1-4x_3)^2$$

所以令：

$$\begin{cases}y_1=x_1,\\y_2=x_1-x_2,\\y_3=x_1-4x_3,\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=\frac{1}{4}y_1-\frac{1}{4}y_3,\end{cases}$$

就把 f 化成标准型 $f=\frac{3}{2}y_1^2-y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2$，所用变换矩阵为：

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}\quad\left(|\boldsymbol{C}|=\frac{1}{4}\neq 0\right)$$

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 即为所作变换.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$.

解：

在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2 乘积项，故令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$代入并配方可得：

$$f=2y_1^2-2y_2^2+4(y_1+y_2)y_3=2(y_1^2+2y_1y_3+y_3^2)-2(y_2^2-2y_2y_3+y_3^2)=2(y_1+y_3)^2-2(y_2+y_3)^2$$

故令$\begin{cases}z_1=y_1+y_3,\\z_2=y_2+y_3,\\z_3=y_3,\end{cases}$

即$\begin{cases}y_1=z_1-z_3,\\y_2=z_2-z_3,\\y_3=z_3,\end{cases}$

就把 f 化为标准型 $f=2z_1^2+2z_2^2$，所用变换矩阵为：

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad(|\boldsymbol{C}|=-2\neq0)$$

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 即为所作变换.

6. 用初等变换法把下列二次型化为标准型，并求所作变换.

(1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4-x_3x_4$；

解：

二次型 f 的矩阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[c_2+c_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{-r_1+r_3\\-r_1+r_4}]{-\frac{1}{2}r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1&1\\0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&-1&-\frac{3}{2}\\0&0&-\frac{3}{2}&-1\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_1+c_4]{\substack{-\frac{1}{2}c_1+c_2\\ -c_1+c_3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&-1&-\frac{3}{2}\\0&0&-\frac{3}{2}&-1\\1&-\frac{1}{2}&-1&-1\\1&\frac{1}{2}&-1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{3}{2}c_3+c_4]{-\frac{3}{2}r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&\frac{5}{4}\\1&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故令 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{3}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，则 $f=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2+\frac{5}{4}y_4^2$.

(2) $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+5x_1x_2-4x_2x_3$.

解：

二次型 f 的矩阵：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}&0\\\frac{5}{2}&0&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&\frac{5}{2}&0\\\frac{5}{2}&0&-2\\0&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[4c_2]{4r_2}\begin{pmatrix}2&10&0\\10&0&-8\\0&-8&0\\1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-5c_1+c_2]{-5r_1+r_2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-50&-8\\0&-8&0\\1&-5&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-25c_3]{-25r_3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-50&200\\0&200&0\\1&-5&0\\0&4&0\\0&0&-25\end{pmatrix}\xrightarrow[4c_2+c_3]{4r_2+r_3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-50&0\\0&0&800\\1&-5&-20\\0&4&16\\0&0&-25\end{pmatrix}$$

故令 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1&-5&-20\\0&4&16\\0&0&-25\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，则 $f=2y_1^2-50y_2^2+800y_3^2$

7. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$

(1)用正交变换化二次型为标准型；

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 为上述二次型的矩阵，求 $\boldsymbol{A}^5$.

解：

(1) f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，特征方程为：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1\\1&-\lambda&1\\-1&1&-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{-r_1+r_3}\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1\\1&-\lambda&1\\\lambda-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_1}\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&-1\\2&-\lambda&1\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\2&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$$

特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，求解 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

正交化得：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

单位化得：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=-2$ 时，求解 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

令正交矩阵 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & 2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$，正交变换为：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，此时 f 的标准型为：$f=y_1^2+y_2^2-2y_3^2$.

（2）因为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(T\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(T\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}T)\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2-2y_3^2=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{y}$，所以有：

$T^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，由于 T 是正交矩阵，所以有：

$$\boldsymbol{A}^5=\left(T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\right)^5=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^5\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1&\sqrt{2}\\ \sqrt{3}&1&-\sqrt{2}\\ 0&2&\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-32\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\ -1&1&2\\ \sqrt{2}&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1&-32\sqrt{2}\\ \sqrt{3}&1&32\sqrt{2}\\ 0&2&-32\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\ -1&1&2\\ \sqrt{2}&-\sqrt{2}&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-60&66&-66\\66&-60&66\\-66&66&-60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&11&-11\\11&-10&11\\-11&11&-10\end{pmatrix}$$

8. 求正交变换，把二次曲面方程 $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$ 化成标准方程.

解：

令 $f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$

其矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，求解特征方程：

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\0&1-\lambda&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{-c_3+c_2}\begin{vmatrix}2-\lambda&4&-2\\2&9-\lambda&-4\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&4\\2&9-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+10)=(1-\lambda)^2(10-\lambda)=0$$

得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=10$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，求解$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，正交化得：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}$$

单位化得：

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{45}}\\\frac{4}{\sqrt{45}}\\\frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=10$ 时，求解$(\boldsymbol{A}-10\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，

单位化得：$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_3}{\|\boldsymbol{\alpha}_3\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

令正交矩阵 $T=(\boldsymbol{\gamma}_1,\ \boldsymbol{\gamma}_2,\ \boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-6 & 2 & \sqrt{5}\\3 & 4 & 2\sqrt{5}\\0 & 5 & -2\sqrt{5}\end{pmatrix}$，

正交变换为：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，此时标准方程为：$f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1$.

9. 判断下列二次型的正定性.

(1) $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$；

(2) $f=3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-x_2x_3$；

(3) $f=99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$.

解：

(1) f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -6 & 1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

因为 $a_{11}=-2<0$，$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11>0$，$|A|=-42<0$，

所以 f 为负定二次型.

(2) f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 4 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & 5\end{pmatrix}$$

因为 $a_{11}=3>0$，$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=8>0$，$|A|=\frac{157}{4}>0$，

所以 f 为正定二次型.

(3) f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}99 & -6 & 24\\ -6 & 130 & -30\\ 24 & -30 & 71\end{pmatrix}$$

因为 $a_{11}=99>0$，$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}99 & -6\\ -6 & 130\end{vmatrix}=12834>0$，$|A|=18234>0$，

所以 f 为正定二次型.

10. t 满足什么条件时，下列二次型是正定的？

(1) $f=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_2x_3$；

(2) $f=x^2+2y^2+2xy-2xz+2tyz$.

解：

(1) f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ t & 4 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，二次型是正定的，当且仅当：

$a_{11}=1>0$，$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0$，$|A|=7-2t^2>0$

所以当且仅当 $-\frac{\sqrt{14}}{2}<t<\frac{\sqrt{14}}{2}$ 时，二次型是正定的.

(2) f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & t\\ -1 & t & 0\end{pmatrix}$，因为 $|A|=-(t+1)^2\leqslant 0$，所以无论 t 取什么值，二次型都不可能是正定的.

11. 假设把任意 $x_1\neq 0$，$x_2\neq 0$，…，$x_n\neq 0$ 代入二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都使 $f>0$，问 f 是否

正定?

解:

f 不一定正定.

例如, $f(x_1, x_2)=x_1^2$, 对任意 $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ 都使 $f>0$, 但当 $x_1=0$, $x_2=1$ 时, $f=0$, 不满足正定二次型定义.

12. 试证:如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定的.

证明:

如果 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵, 则对于任意的 $\boldsymbol{x} \neq 0$, $f_1=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, $f_2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$, 所以 $f=f_1+f_2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$, 这就说明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定的.

13. 试证:如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明:

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 所以任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 必然有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$(否则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, 与 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾), 因而二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2>0$, 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

14. 试证:如果 $\boldsymbol{A}$ 正定, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^*$ 都是正定矩阵.

证明:

因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以对任意向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$,

所以有: $f_1=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵.

又因为:

$f_2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})$

由 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$(否则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, 与 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾), 所以由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是正定矩阵, 有 $f_2>0$, 所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵.

又因为 $\boldsymbol{A}$ 正定, 所以 $|\boldsymbol{A}|>0$, $f_3=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{A}|f_2>0$, 所以 $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵.