第 7 章习题答案

1. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间？

(1) 2 阶对称矩阵的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

解：

将 2 阶对称矩阵的全体记为 S_2，矩阵加法记为“+”，矩阵的数量乘法记为“·”.

对加法封闭：对任意 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}\in S_2$，有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in S_2$；

对数乘封闭：对任意 $k\in\mathbf{R}$，$\boldsymbol{A}\in S_2$，有 $(k\cdot\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=k\cdot\boldsymbol{A}$，所以 $k\cdot\boldsymbol{A}\in S_2$；

对任意 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$C\in S_2$，k，$m\in\mathbf{R}$，下面 8 条运算规律成立：

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

S_2 中的元素 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$（$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ 称为零元素）；

$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$（$-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负元素）；

$1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

$k\cdot(m\cdot\boldsymbol{A})=(km)\cdot\boldsymbol{A}$；

$(k+m)\cdot\boldsymbol{A}=k\cdot\boldsymbol{A}+m\cdot\boldsymbol{A}$；

$k\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\cdot\boldsymbol{A}+k\cdot\boldsymbol{B}$.

所以 2 阶对称矩阵的全体，对于矩阵的加法和数量乘法构成实数域上的线性空间.

(2) 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：

$k\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

解：

对于 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1)$，$k=1$，$m=1$，我们有：

$(k+m)\cdot\boldsymbol{\alpha}=(1,1)\neq(1,1)+(1,1)=k\cdot\boldsymbol{\alpha}+m\cdot\boldsymbol{\alpha}$

所以平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量乘法：

$k\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$

不构成实数域上的线性空间.

(3) 全体实数对 $\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$，对于如下定义的加法 $\oplus$ 和数量乘法 $\otimes$：

$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)$

$k\oplus(a_1,b_1)=\left(ka_1,kb_1+\dfrac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)$.

解：

将全体实数对 $\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$ 记为 $\mathbf{R}_2$.

对加法封闭：对任意 (a_1,b_1)，$(a_2,b_2)\in\mathbf{R}_2$，有：

$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\in\mathbf{R}_2$

对数乘封闭：对任意 $k\in\mathbf{R}$，$(a,b)\in S_2$，有：

$$k\otimes(a,\ b)=\left(ka,\ kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2\right)\in\mathbf{R}_2$$

对任意$(a_1,\ b_1)$，$(a_2,\ b_2)$，$(a_3,\ b_3)\in\mathbf{R}_2$，$k$，$m\in\mathbf{R}$，下面8条运算规律成立：

$$(a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)=(a_2+a_1,\ b_2+b_1+a_2a_1)=(a_2,\ b_2)\oplus(a_1,\ b_1)$$

$$\begin{aligned}((a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2))\oplus(a_3,\ b_3)&=(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)\oplus(a_3,\ b_3)\\&=(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+a_1a_2+b_3+(a_1+a_2)a_3)\\&=(a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3+a_2a_3+a_1(a_2+a_3))\\&=(a_1,\ b_1)\oplus(a_2+a_3,\ b_2+b_3+a_2a_3)\\&=(a_1,\ b_1)\oplus((a_2,\ b_2)\oplus(a_3,\ b_3))\end{aligned}$$

$\mathbf{R}_2$ 中的元素$(0,0)$满足$(a_1,\ b_1)\oplus(0,0)=(a_1+0,\ b_1+0+a_1\cdot 0)=(a_1,\ b_1)$，

（$(0,0)$称为零元素）；

$(a_1,\ b_1)\oplus(-a_1,\ -b_1+a_1^2)=(a_1+(-a_1),\ b_1+(-b_1+a_1^2)+a_1(-a_1))=(0,0)$，

（$(-a_1,\ -b_1+a_1^2)$称为$(a_1,\ b_1)$的负元素）；

$$1\otimes(a_1,\ b_1)=\left(1a_1,\ 1b_1+\frac{1(1-1)}{2}a_1^2\right)=(a_1,\ b_1);$$

$$\begin{aligned}k\otimes(m\otimes(a_1,\ b_1))&=k\otimes\left(ma_1,\ mb_1+\frac{m(m-1)}{2}a_1^2\right)\\&=\left(kma_1,\ k\left(mb_1+\frac{m(m-1)}{2}a_1^2\right)+\frac{k(k-1)}{2}(ma_1)^2\right)\quad;\\&=\left(kma_1,\ kmb_1+\frac{km(km-1)}{2}a_1^2\right)=(km)\otimes(a_1,\ b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k+m)\otimes(a_1,\ b_1)&=\left((k+m)a_1,\ (k+m)b_1+\frac{(k+m)(k+m-1)}{2}a_1^2\right)\\&=\left(ka_1+ma_1,\ kb_1+mb_1+\frac{k^2+2km+m^2-k-m}{2}a_1^2\right)\\&=\left(ka_1+ma_1,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+mb_1+\frac{m(m-1)}{2}a_1^2+ka_1ma_1\right)\\&=\left(ka_1,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(ma_1,\ mb_1+\frac{m(m-1)}{2}a_1^2\right)=k\otimes(a_1,\ b_1)\oplus m\otimes(a_1,\ b_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&k\otimes((a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2))\\&=k\otimes(a_1+a_2,\ b_1+b_2+a_1a_2)\\&=\left(k(a_1+a_2),\ k(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{k(k-1)}{2}(a_1+a_2)^2\right)\\&=\left(ka_1+ka_2,\ kb_1+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2+k^2a_1a_2\right)\\&=\left(ka_1+ka_2,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2+kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2+ka_1ka_2\right)\\&=\left(ka_1,\ kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)\oplus\left(ka_2,\ kb_2+\frac{k(k-1)}{2}a_2^2\right)\\&=k\otimes(a_1,\ b_1)\oplus k\otimes(a_2,\ b_2)\end{aligned}$$

所以全体实数对$\{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$，对于如下定义的加法$\oplus$和数量乘法$\otimes$：

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2+a_1a_2)$$

$$k \otimes (a_1, b_1) = \left(ka_1, kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right)$$

构成实数域上的线性空间.

2. 试判定下列各子集哪些为线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间？

(1) $W_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n \mid x_1+x_2+\cdots+x_n = 0\}$；

(2) $W_2 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n \mid x_1x_2\cdots x_n = 0\}$；

解：

(1) 任取 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} \in W_1$, $k \in \mathbf{R}$, 有：

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$

满足

$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n) = (x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n) = 0+0=0$

所以有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in W_1$；

$k\boldsymbol{\alpha} = (kx_1, kx_2, \cdots, kx_n)$满足：$kx_1+kx_2+\cdots+kx_n = k(x_1+x_2+\cdots+x_n) = k \cdot 0 = 0$

所以有 $k\boldsymbol{\alpha} \in W_1$；

由教材 P142 定理 7. 2, W_1 为线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间；

(2) 取 $\boldsymbol{\alpha} = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1, 0}_{n-1\text{个}1})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (\underbrace{0, 0, \cdots, 0, 1}_{n-1\text{个}0})^{\mathrm{T}}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W_2$, 但 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n\text{个}1})^{\mathrm{T}} \notin W_2$，由教材 P142 定理 7. 2, W_2 不为线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

3. 设 U 是线性空间 V 的一个子空间，试证：若 U 与 V 的维数相等，则 $U=V$.

证明：

反证法. 如果 $U \neq V$, 则存在向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$, $\boldsymbol{\alpha} \notin U$.

设 U 与 V 的维数为 n. 取 U 的一组基：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，因为 U 是线性空间 V 的一个子空间，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 V 中一组线性无关的向量.

由于 V 的维数为 n，所以 V 作为向量组，其秩为 n，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一个极大线性无关组. 由 $\boldsymbol{\alpha} \in V$，存在 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n \in U$，这与假设矛盾. 所以 $U=V$.

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 n 维线性空间 V_n 的线性无关向量组，证明 V_n 中存在向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 成为 V_n 的一组基(对 $n-r$ 用数学归纳法).

证明：

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 n 维线性空间 V_n 的线性无关向量组，由 $r<n$ 可知，存在 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1} \in V_n$ 无法由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出(否则 V_n 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，则 V_n 的维数为 $r<n$，与题设矛盾)，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}$ 仍然是 n 维线性空间 V_n 的线性无关向量组.

反复这样的添加向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$，最终得到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V_n 的线性无关向量组. 因为 n 维线性空间 V_n 作为向量组的秩为 n，其中任意 n 个线性无关向量构成它的一个极大线性无关组，也就是它的基，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 成为 V_n 的一组基.

5. 求 $\mathbf{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标.

解：

设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，则有：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$$

因为：

$$\begin{pmatrix}1&6&3&1&0&0\\3&3&1&0&1&0\\5&2&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-5r_1+r_3]{-3r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&6&3&1&0&0\\0&-15&-8&-3&1&0\\0&-28&-15&-5&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-15r_3}\begin{pmatrix}1&6&3&1&0&0\\0&-15&-8&-3&1&0\\0&420&225&75&0&-15\end{pmatrix}\xrightarrow{28r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&6&3&1&0&0\\0&-15&-8&-3&1&0\\0&0&1&-9&28&-15\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[8r_3+r_2]{-3r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&6&0&28&-84&45\\0&-15&0&-75&225&-120\\0&0&1&-9&28&-15\end{pmatrix}\xrightarrow[-6r_2+r_1]{-\frac{1}{15}r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&6&-3\\0&1&0&5&-15&8\\0&0&1&-9&28&-15\end{pmatrix}$$

所以有 $\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&6&-3\\5&-15&8\\-9&28&-15\end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{\alpha}=(3,7,1)^{\mathrm{T}}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(6,3,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,0)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&6&3\\3&3&1\\5&2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&6&-3\\5&-15&8\\-9&28&-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}33\\-82\\154\end{pmatrix}$$

6. 在 $\mathbf{R}^3$ 中，取两个基：

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,7,1)$；

$\boldsymbol{\beta}_1=(3,1,4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(5,2,1)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,1,-6)$.

试求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵与坐标变换公式.

解：

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，则有：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&4\\5&2&1\\1&1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&1\end{pmatrix}^{-1}$$

初等变换法求逆矩阵：

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\2&3&3&0&1&0\\3&7&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-3r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&1&-2&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&-1&1&-2&1&0\\0&0&-1&-5&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&2&0&-4&1&1\\0&-1&0&-7&2&1\\0&0&-1&-5&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-18&5&3\\0&-1&0&-7&2&1\\0&0&-1&-5&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-18&5&3\\0&1&0&7&-2&-1\\0&0&1&5&-1&-1\end{pmatrix}$$

所以有：

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-18&5&3\\7&-2&-1\\5&-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&1&4\\5&2&1\\1&1&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-18&5&3\\7&-2&-1\\5&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&9&4\\-71&20&12\\-41&9&8\end{pmatrix}$$

设 $\mathbf{R}^3$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 (x_1, x_2, x_3)，在 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 下的坐标为 (x_1', x_2', x_3')，则由 $(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}=(x_1', x_2', x_3')\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}$，得初等变换公式：

$$(x_1, x_2, x_3)=(x_1', x_2', x_3')\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{pmatrix}^{-1}=(x_1', x_2', x_3')\boldsymbol{C}=(x_1', x_2', x_3')\begin{pmatrix}-27&9&4\\-71&20&12\\-41&9&8\end{pmatrix}$$

7. 在 $\mathbf{R}^4$ 中求基

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

到基

$\boldsymbol{\beta}_1=(2, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0, 3, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5, 3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=(6, 6, 1, 3)^{\mathrm{T}}$

的过渡矩阵，确定向量 $\boldsymbol{\xi}=(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ 在后一个基下的坐标，并求一非零向量，使它在两组基下有相同的坐标.

解：

设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，则有：

$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{C}$，

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4)^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}^{-1}$$

因为：

$$\begin{pmatrix}2&0&5&6&1&0&0&0\\1&3&3&6&0&1&0&0\\-1&1&2&1&0&0&1&0\\1&0&1&3&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_3]{\substack{-2r_4+r_1\\-r_4+r_2}}\begin{pmatrix}0&0&3&0&1&0&0&-2\\0&3&2&3&0&1&0&-1\\0&1&3&4&0&0&1&1\\1&0&1&3&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[3r_4]{\substack{-3r_3+r_2\\3r_2}}\begin{pmatrix}0&0&3&0&1&0&0&-2\\0&0&-21&-27&0&3&-9&-12\\0&1&3&4&0&0&1&1\\3&0&3&9&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_4]{\substack{7r_1+r_2\\-r_1+r_3}}\begin{pmatrix}0&0&3&0&1&0&0&-2\\0&0&0&-27&7&3&-9&-26\\0&1&0&4&-1&0&1&3\\3&0&0&9&-1&0&0&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[9r_4]{\substack{9r_1\\-r_2\\27r_3}}\begin{pmatrix}0&0&27&0&9&0&0&-18\\0&0&0&27&-7&-3&9&26\\0&27&0&108&-27&0&27&81\\27&0&0&81&-9&0&0&45\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-3r_2+r_4]{-4r_2+r_3}\begin{pmatrix}0&0&27&0&9&0&0&-18\\0&0&0&27&-7&-3&9&26\\0&27&0&0&1&12&-9&-23\\27&0&0&0&12&9&-27&-33\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2\leftrightarrow r_3}}\begin{pmatrix}27&0&0&0&12&9&-27&-33\\0&27&0&0&1&12&-9&-23\\0&0&27&0&9&0&0&-18\\0&0&0&27&-7&-3&9&26\end{pmatrix}$$

所以有：$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}$.

设$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$在$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$下的坐标为$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，则有：

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$,

$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\boldsymbol{C}(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$,

$$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

要使在两个基下面有相同的坐标，必须$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$即：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}，\text{整理得：}\begin{pmatrix}-15&9&-27&-33\\1&-15&-9&-23\\9&0&-27&-18\\-7&-3&9&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-15&9&-27&-33\\1&-15&-9&-23\\9&0&-27&-18\\-7&-3&9&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{9}r_3]{\frac{1}{3}r_1}\begin{pmatrix}-5&3&-9&-11\\1&-15&-9&-23\\1&0&-3&-2\\-7&-3&9&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[7r_3+r_4]{\substack{5r_3+r_1\\-r_3+r_2}}\begin{pmatrix}0&3&-24&-21\\0&-15&-6&-21\\1&0&-3&-2\\0&-3&-12&-15\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+r_4]{5r_1+r_2}\begin{pmatrix}0&3&-24&-21\\0&0&-126&-126\\1&0&-3&-2\\0&0&-36&-36\end{pmatrix}\xrightarrow[36r_2+r_4]{\substack{\frac{1}{3}r_1\\-\frac{1}{126}r_2}}\begin{pmatrix}0&1&-8&-7\\0&0&1&1\\1&0&-3&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[3r_2+r_3]{8r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

得基础解系$\boldsymbol{\xi}=(-1,-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$即为所求非零向量，在两组基下有相同的坐标.

8. 判别下面所定义的变换，哪些是线性变换，哪些不是？

(1) 在线性空间 V 中，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定向量；

(2) 在 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$；

(3) 在 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$，其中 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是两个固定矩阵.

解：

(1) 当 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 时，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}$ 显然为线性变换中的恒等变换；

当 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$ 时，$\boldsymbol{T}(2\boldsymbol{\xi})-2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})=(2\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha})=-\boldsymbol{\alpha}\neq0$，所以 $\boldsymbol{T}(2\boldsymbol{\xi})\neq2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})$，说明此时 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$ 不是线性变换.

综上，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=0$ 时，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$ 是线性变换.

(2) 由(1)结论可知，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^3$ 不是线性变换.

(3) 因为任取 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$k\in\mathbf{R}$ 有：

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BXC}+\boldsymbol{BYC}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y})$

$\boldsymbol{T}(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{C}=k\boldsymbol{BXC}=kT(\boldsymbol{X})$

所以 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{BXC}$ 是线性变换.

9. 在 n 维线性空间 $\mathbf{R}[x]_n$ 中，定义线性变换微分运算 $\Gamma(f(x))=f'(x)$，其中 $f(x)\in\mathbf{R}[x]_n$. 求 Γ 的值域与核.

解：

任取 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in\mathbf{R}[x]_n$，必然有：$\Gamma(f(x))=f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\in\mathbf{R}[x]_{n-1}$

反之，任取 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}\in\mathbf{R}[x]_{n-1}$，有：

$f(x)=b_0x+\dfrac{1}{2}b_1x^2+\cdots+\dfrac{1}{n}b_{n-1}x^n\in\mathbf{R}[x]_n$ 使得 $\Gamma(f(x))=f'(x)=g(x)$

所以 Γ 的值域为 $R[x]_{n-1}$.

由高等数学知识易得 Γ 的核为 R.

10. 已知 $\mathbf{R}^3$ 中，$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$，定义线性变换 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\begin{cases}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_1)=(-5,0,3)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_2)=(0,-1,6)^{\mathrm{T}},\\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_3)=(-5,-1,9)^{\mathrm{T}},\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$下的矩阵.

解：

因为$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$，

所以有：

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-1\\2&1&0\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix}-1&0&3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_1+r_3}\begin{pmatrix}-1&0&3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&1&6&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{pmatrix}-1&0&3&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&7&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[7r_2]{-7r_1}\begin{pmatrix}7&0&-21&-7&0&0\\0&7&-7&0&7&0\\0&0&7&2&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_2]{3r_3+r_1}\begin{pmatrix}7&0&0&-1&-3&3\\0&7&0&2&6&1\\0&0&7&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}(-\boldsymbol{\eta}_1 + 2\boldsymbol{\eta}_2 + 2\boldsymbol{\eta}_3,\ -3\boldsymbol{\eta}_1 + 6\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_3,\ 3\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2 + \boldsymbol{\eta}_3)$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \frac{1}{7}(-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_1) + 2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_2) + 2\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_3)) = \frac{1}{7}\left(-\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_2) = \frac{1}{7}(-3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_1) + 6\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_2) - \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_3)) = \frac{1}{7}\left(-3\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 20 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_3) = \frac{1}{7}(3\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_1) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_2) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}_3)) = \frac{1}{7}\left(3\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3) = (\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_1), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_2), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ 0 & 7 & 0 \\ 27 & 9 & 24 \end{pmatrix}$,

所以 $\boldsymbol{T}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ 下的矩阵为：$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ 0 & 7 & 0 \\ 27 & 9 & 24 \end{pmatrix}$.

11. 给定线性空间 $\mathbf{R}^3$ 中的两组基

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_2 = (2, 2, -1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\eta}_3 = (2, -1, -1)^{\mathrm{T}}$

求从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵.

解：

设从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{C}$，则 $(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{C}$，于是：

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3)^{-1}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_2]{-r_3+r_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_3]{-r_1+r_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2+r_3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

于是我们得到，从基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1$, $\boldsymbol{\eta}_2$, $\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵：

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$