练习 1.1

(1.1 矩阵及其运算)

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}^{2}=\begin{pmatrix}a+2c&0&c\\0&b&0\\2c&0&c\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=($　　$)$.

(A) $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&a&0\\0&0&b\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&c&0\\0&0&a\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}c&0&0\\0&b&0\\0&0&a\end{pmatrix}$

二、填空题

1. 若 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}4&3&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\0&-5&1\end{pmatrix}$，则

(1) $A-2B+3C=$ ________；(2) $AB^{\mathrm{T}}=$ ____________.

2. 若矩阵 X 满足 $\begin{pmatrix}3&-6&2&0\\1&5&-1&8\\4&3&1&7\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}5&4&-4&2\\-7&1&9&4\\6&-1&3&9\end{pmatrix}$，则 $X=$ __________.

3. $(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=$ ________；$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1,2)=$ __________.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行，再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列，得到矩阵 $\begin{pmatrix}-2&1&-1\\1&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ________.

三、设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$，问：1. $AB=BA$ 吗？ 2. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 吗？ 3. $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 吗？

四、计算下列乘积：

1. $\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}$；2. $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

五、设 $f(x)=3x^2-2x+5$，$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

六、设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$，求 A^k.

练习 1.2

(1.2 行列式及其计算)

一、选择题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = (\qquad)$.

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

二、填空题

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} =$ ________; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} =$ ________.

2. 4 阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为 ________.

3. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为 ________.

4. 设 $A=(a_{ij})$ 为 3 阶矩阵, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 若 A 的每行元素之和均为 2, 且 $|A|=3$, 则 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ________.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ ________; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$ ________.

6. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

三、证明: $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

四、计算下列各行列式(D_k 为 k 阶行列式):

1. $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$, 其中主对角线上元素都是 a, 其余未写出的元素都是 0;

2. $D_n = \begin{vmatrix} 2008 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2008 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2008 \\ 0 & 2008 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$;

3. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$;

4. $D_n = \begin{vmatrix} 2n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 2n & n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & 2n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 2n \end{vmatrix}$;

5. $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$.

练习 1.3

(1.3 方阵的逆)

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则(　　).

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　(B) A^{-1} 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似　　(D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

二、填空题

1. 设 A 为 4 阶矩阵，且 $|A|=\dfrac{1}{2}$，则 $|(3A)^{-1}-2A^{*}|=$ __________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&0&1\\3&3&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ __________，$(A^{*})^{-1}=$ __________.

3. 已知矩阵 X 满足 $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\1&-2\end{pmatrix}$，则 $X=$ __________.

三、计算题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}；　2. 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 $(A^{*})^{-1}$.

四、设 A 的伴随矩阵 $A^{*}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

五、证明题

1. 设方阵 X 满足 $X^{2}-X-2E=0$，证明 X，$X+2E$ 都可逆，并求 X^{-1}，$(X+2E)^{-1}$.

2. 若 A，B 为同阶可逆矩阵，则 $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$.

练习 1.4

（1.4 Cramer 法则）

一、填空题

1. 当 $\lambda =$ ________ 或 $\mu =$ ________，齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解.

2. 齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda =$ ________.

二、利用克拉默法则解下列线性方程组：

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ x_4 + 5x_5 = 1 \end{cases}$

练习 2.1

(2.1 矩阵的初等变换)

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 为3阶可逆矩阵，且$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若$\boldsymbol{P}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，则$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=($　　$)$.

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

2. 下列矩阵中，可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}$

二、填空题

1. 设方阵 A 满足：$A^*BA=2BA-8E$，其中$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$E$ 为单位矩阵，A^* 为 A 伴随矩阵，则 $B=$ __________

2. 设 A，B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3$，$|B|=2$，$|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ________.

3. 设 A 为3阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B，则 $|BA^*|=$ ________.

三、用初等变换将下列矩阵化为标准形：

1. $\begin{pmatrix}3&2&-4\\3&2&-4\\1&2&-1\end{pmatrix}$；2. $\begin{pmatrix}1&7&-1&3\\-1&4&0&2\\1&7&-1&3\\3&-1&-1&-1\\5&1&3&0\end{pmatrix}$；3. $\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0\\2&-2&4&2&0\\3&0&6&-1&1\\3&0&6&3&1\end{pmatrix}$.

四、求解下列矩阵方程：

1. $AX + E = A^2 + X$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$，其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，E 为 3 阶单位矩阵.

五、设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. 当 a，b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

练习 2.2

(2.2 矩阵的秩)

一、填空题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 1 & -3 & t\\ 1 & t & -3 & 5 & -2\end{pmatrix}$，且 $R(A)=2$，则 $t=$ ________.

2. 若 A 为 4×3 矩阵，且 $R(A)=2$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$，则 $R(AB)=$ ________.

3. 若 $P\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} & a_{14}-3a_{34}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{pmatrix}$.
则 $P=$ ________.

4. 设 A 为 3 阶矩阵，A^* 为的 A 伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵，若 $r(2E-A)=1$，$r(E+A)=2$，则 $|A^*|=$ ________.

二、单项选择题

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -3 & 6 & 8\\ 2 & -4 & t\end{pmatrix}$，且 $R(A)=2$，则 $t=$(　　).

(A) -6　　(B) 6　　(C) 8　　(D) t 为任何实数

2. 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & c & c^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & a & a^2\end{pmatrix}$ 的秩为 3，则(　　)

(A) a,b,c 都不等于 1　　(B) a,b,c 都不等于 0

(C) a,b,c 互不相等　　(D) $a=b=c$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & -3 & 2\\ 3 & 5 & a & -4 & 4\\ 4 & 5 & 0 & 3 & 7-a\end{pmatrix}$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $a=0$ 时 $r(A)=4$　　(B) $a=1$ 时 $r(A)=5$

(C) $a=2$ 时 $r(A)=1$　　(D) $a=5$ 时 $r(A)=2$

4. 已知 A 是 $m\times n$ 的矩阵，β 是 m 维非零向量. 若 A 有 k 阶非零子式，则(　　).

(A) 当 $k=m$ 时 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 有解　　(B) 当 $k=m$ 时 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 无解

(C) 当 $k<m$ 时 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 有解　　(D) 当 $k<m$ 时 $A\boldsymbol{x}=\beta$ 无解

5. 设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则(　　).

(A) $r(A,AB)=r(A)$　　(B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　(D) $r(A,B)=r(A^{\mathrm{T}},B^{\mathrm{T}})$

三、求下列矩阵的逆矩阵：1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$；2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

四、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & k & 1 \end{pmatrix}$，当 k 取何值时，$R(A) = 3$，当 k 取何值时，$R(A) < 3$.

五、证明同型矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是它们的秩相等.

练习 2.3

（2.3 向量组及其线性相关性）

一、填空题

1. 已知向量 $\alpha_1=(1, 1, 1, 1)^T$，$\alpha_2=(1, 1, 1, 0)^T$，$\alpha_3=(1, 1, 0, 0)^T$，$\alpha_4=(1, 0, 0, 0)^T$，则向量 $\beta=(0, 2, 0, -1)^T$ 用 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表示为 ________.

2. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，3 维列向量 $\alpha=(a, 1, 1)^T$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ ________.

3 设向量组 $\alpha_1=(a, 0, c)^T$，$\alpha_2=(b, c, 0)^T$，$\alpha_3=(0, a, b)^T$ 线性无关，则 a，b，c 必满足关系式 ________.

二、单项选择题

1. 下列命题中正确的是（　　）.

（A）在线性相关的向量组中，去掉若干向量后所得向量组仍然线性相关；

（B）在线性无关的向量组中，去掉每个向量的最后若干分量后仍然线性无关；

（C）任何 $n+k$ 个 n 维向量（$k\geqslant 1$）必然线性相关；

（D）若只有 k_1，k_2，…，k_m 全为零时，等式 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$. 才成立，且 α_1，α_2，…，α_m 线性无关，则 β_1，β_2，…，β_m 线性无关.

2. 下列向量组中，线性无关的向量组是（　　）.

（A）$(1, 3, 0)$，$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$；

（B）$(2, 0)$，$(0, 1)$；

（C）$(1, 1, 3)$，$(2, 4, 5)$，$(1, -1, 0)$，$(2, 2, 6)$；

（D）$(5, 2, 9)$，$(2, 1, 2)$，$(7, 3, 11)$

3. 设 A 为 5 阶方阵，且 $|A|=0$，则 A 中（　　）.

（A）必有一列元素为零

（B）必有两列元素对应成比例

（C）必有某列向量是其余列向量的线性组合

（D）任一列向量是其余列向量的线性组合

4. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ b\\ a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\ a\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，且其中任意两个向量均线性无关，则（　　）.

（A）$a=1$，$b\neq -1$　　（B）$a=1$，$b=-1$

（C）$a\neq -2$，$b=2$　　（D）$a=-2$，$b=2$

三、设 $\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，…，$\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$，且向量组 α_1，α_2，…，α_r 线性

无关，证明：向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关.

四、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值.

(2) 求 A 的列向量组的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$，并求矩阵 H，使得 $A=GH$，其中 $G=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

练习 2.4

（2.4 向量组的秩）

一、填空题

1. 已知向量组 $\alpha_1=(2,1,3,-1)^T$，$\alpha_2=(3,-1,2,0)^T$，$\alpha_3=(1,3,4,-2)^T$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)^T$，则秩 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$ ____________.

2. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,-1,1)$，$\alpha_2=(2,0,t,0)$，$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为2，则 $t=$ ________.

二、单项选择题

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 都是 n 维向量组，且 $R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$，则（　　）.

（A）两向量组等价

（B）$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=r$

（C）当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 能由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出时，两向量组等价

（D）当 $s=t$ 时，两向量组等价

2. 设 A 为 n 阶方阵，满足 $R(A)=r<n$，则在 A 的 n 个行向量中（　　）.

（A）必有 r 个行向量线性无关

（B）任意 r 个行向量都线性无关

（C）任意 r 个行向量都构成极大线性无关组

（D）任一行向量都可由其他 r 个行向量线性表出

3. 设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_S$ 线性表示. 则下列命题正确的是（　　）.

（A）若向量组 I 线性无关，则 $r\leqslant s$　　（B）若向量组 I 线性相关，则 $r>s$

（C）若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$　　（D）若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$

4. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 $AB=E$，则（　　）.

（A）秩 $R(A)=m$，秩 $R(B)=m$.　　（B）秩 $R(A)=m$，秩 $R(B)=n$.

（C）秩 $R(A)=n$，秩 $R(B)=m$.　　（D）秩 $R(A)=n$，秩 $R(B)=n$.

5. 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示. 下列命题正确的是（　　）.

（A）若向量组 Ⅰ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

（B）若向量组 Ⅰ 线性相关，则 $r>s$.

（C）若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

（D）若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$.

三、设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}7\\0\\14\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}5\\1\\6\\2\end{pmatrix}$，

（1）求该向量组的秩；

（2）求该向量组的一个极大无关组，并把其余向量分别用求得的极大无关组线性表出.

四、设向量组 $\alpha_1=(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1, 3, 5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\beta_1=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\beta_2=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\beta_3=(3, 4, k)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，

（1）求向量组 α_1，α_2，α_3 的一个极大无关组；

（2）将向量 β_1 用 α_1，α_2，α_3 线性表示；

（3）求 k 的值.

练习 2.5

（2.5 n 维向量空间）

一、单项选择题

设 $\alpha_1=(1,-2,1)^T$，$\alpha_2=(1,-1,1)^T$，则 $\alpha_3=($　　$)$ 时，有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的基.

(A) $(2,1,2)^T$；　　(B) $(1,0,1)^T$；

(C) $(0,1,0)^T$；　　(D) $(0,0,1)^T$.

二、填空题

设向量 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T$，$\alpha_2=(1,1,0,2)^T$，$\alpha_3=(2,1,1,a)^T$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数为 2，则 $a=$ ________.

三、设 $V_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R},\ x_1+x_2+\cdots+x_n=0\}$，

$V_2=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{R},\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$，问 V_1，V_2 是不是向量空间？为什么？

四、验证 $\alpha_1=(1,-1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,3)^T$，$\alpha_3=(3,1,2)^T$ 为 $\mathbf{R}^3$ 的一个基，并把 $\beta_1=(5,0,7)^T$，$\beta_2=(-9,-8,-13)^T$ 用这个基线性表示.

五、设有向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-4\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，

令 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\sum\limits_{i=1}^{5}k_i\alpha_i$，其中 $k_1,k_2,\cdots k_5$ 为任意实数，

求 T 的维数与一组标准正交基.

六、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 n 维列向量，已知 α_1,α_2 线性无关，α_3,α_4 线性无关，且 $(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_4)=(\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_4)=0$. 证明：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关.

练习 3.1

(3.1 线性方程组及其相关概念 3.2 线性方程组解的判别和求解)

一、选择题

1. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$(   ).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$

2. 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 不可逆，a_{12}的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=0$ 的通解为(   ).

(A) $x=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3为任意常数

(B) $x=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3为任意常数

(C) $x=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3为任意常数

(D) $x=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_1,k_2,k_3为任意常数

二、求下列齐次线性方程的通解：

1. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\\ x_2-x_1+x_4=0\\ x_1+3x_2-3x_4=0\\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=0\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}$

三、求下列非齐次线性方程组的通解：

1. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=2\\ x_1+x_2+2x_3+x_4=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23\\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_5=-2\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\end{cases}$

四、判断 λ 为何值时，方程组$\begin{cases}x+y+z=\lambda x\\ 2x+3y=\lambda y\\ 2x-2y+z=\lambda z\end{cases}$ 有非零解?

五、设线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=\mu\\ -x_1+x_2+4x_4=3-\mu\\ 2x_1+3x_2+5x_3+\lambda x_4=1\end{cases}$，问当 λ,μ 取何值时，此方程组有解?

练习 3.2

(3.2.3 向量组与线性方程组　3.3.1 线性方程组解的结构)

一、填空题

1. 已知方程组$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$有无穷多个解，则 $a=$ ______.

2. 已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$的两个解为 $\boldsymbol{\eta}_1=(2,\frac{1}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-1)^{\mathrm{T}}$，则该方程组的全部解为 ______.

3. 齐次线性方程组 $AX=O$ 的系数矩阵 A 经初等行变换化为$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，则方程组的解为 ______.

4. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$，若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $a=$ ______.

二、单项选择题

1. 设 A 是 3 阶方阵，且方程组 $Ax=b$ 只有一个解，B 是划去 A 的第一行所得到的矩阵，则 $R(B)=$(　　).

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 0

2. 设 A 是 n 阶方阵，且方程组 $Ax=0$ 有无穷多组解，则方程组 $AA^{\mathrm{T}}x=0$(　　).

(A) 仅有零解　　(B) 无解

(C) 有无穷多组解　　(D) 有有限组解

3. 设 A 是 n 阶实矩阵，A^{T} 是 A 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)：$Ax=0$ 和(Ⅱ)$(A^{\mathrm{T}}A)x=0$ 必有(　　).

(A)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

(B)(Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

(C)(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

(D)(Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

4. 设 A，B 均为 n 阶非零矩阵，且 $AB=0$，则它们的秩满足(　　).

(A) 必有一个等于零；　　(B) 都小于 n；

(C) 一个小于 n，一个等于 n；　　(D) 都等于 n.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况为(　　).

(A) 无解　　(B) 有解

(C) 有无穷多解或无解　　(D) 有唯一解或无解

三、设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，

(1) 求 λ，a；

(2) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

四、设 3 阶方阵 $B\neq 0$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$的解.

(1) 求 λ 的值；(2) 求证 $|B|=0$.

五、设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{pmatrix}_n,\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

(1) 证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$；

(2) 当 a 为何值时，该方程组有惟一解，并求 x_1；

(3) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

六、已知数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 满足 $x_0=-1$，$y_0=0$，$z_0=2$，且$\begin{cases}x_n=-2x_{n-1}+2z_{n-1},\\y_n=-2y_{n-1}-2z_{n-1},\\z_n=-6x_{n-1}-3y_{n-1}+3z_{n-1}.\end{cases}$

记 $\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$，写出满足 $\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{A\alpha}_{n-1}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$，并求 $\boldsymbol{A}^n$ 及 x_n，y_n，z_n($n=1,2,\cdots$).

练习 3.3

(3.3.1 线性方程组解的结构(续)　3.3.2 线性方程组的求解方法(二))

一、单项选择题

1. 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个线性无关的解向量, k_1, k_2 为任意常数, 则非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的通解为(　　).

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

2. 设 A 是 n 阶矩阵, α 是 n 维向量, 若 $R\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}=R(A)$, 则线性方程组(　　).

(A) $Ax=\alpha$ 必有无穷多解　　(B) $Ax=\alpha$ 必有惟一解

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 仅有零解　　(D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解

3. 已知非齐次线性方程组 $AX=B$ 的 3 个解向量为 η_1, η_2, η_3, 若 $(\eta_1+\eta_2)-k\eta_3$ 是其导出组 $AX=O$ 的解向量, 则 $k=$(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

4. 已知 β_1, β_2 为方程组 $Ax=b$ 的两个特解, α_1, α_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一组基础解系, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax=b$ 的通解为(　　).

(A) $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)$

(B) $k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)$

(C) $k_1(\beta_1+\beta_2)+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)$

(D) $k_1(\beta_1+\beta_2)+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$

5. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶可逆矩阵, 则 $n-1$ 元线性方程组 $\sum\limits_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_j=a_{in}$, $(i=1, 2, \cdots, n)$(　　).

(A) 有惟一解　　(B) 无解

(C) 有无穷多解　　(D) A, B, C 都可能发生

6. 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x=0$ 的基础解系可为(　　).

(A) α_1, α_3　　(B) α_1, α_2

(C) α_1, α_2, α_3　　(D) α_2, α_3, α_4

二、填空题

1. 已知线性方程组 $\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$ 有解，其中 a，b 为常数，$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$，则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

三、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，

（1）计算行列式 $|A|$；

（2）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解，并求其通解.

四、已知 4 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3，又 α_1，α_2，α_3 是它的 3 个解向量，其中 $\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$， $\alpha_2 + \alpha_3 = (1, 0, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，求该非齐次线性方程组的通解.

五、设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & a-1 \\ 2 & -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$，向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

（1）证明：方程组 $\boldsymbol{Ax} = \alpha$ 的解均为方程组 $\boldsymbol{Bx} = \beta$ 的解；

（2）若方程组 $\boldsymbol{Ax} = \alpha$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{\beta}$ 不同解，求 a 的值.

练习 4.1

(4.1.1 正交矩阵与正交变换)

一、填空题

1. 若 A 为 n 阶实方阵，则 A 为正交矩阵的充要条件是 ____________________，或者 __________，或者 ____________________.

2. 设 $A=\begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为正交矩阵，则 a, b 取值为 ____________________.

3. 设 A, B 为 n 阶正交矩阵，n 为奇数，则行列式 $|(A-B)(A+B)|=$ ________.

二、矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$ 是不是正交阵，并说明理由.

三、设 A 是 n 阶正交阵，证明 A^* 也是正交阵.

四、若 α 是一个单位向量，证明：$Q=E-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 是一个正交矩阵；当 $\alpha=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\mathrm{T}}$ 时，求出 Q.

五、设二次型 $f(x_1, x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1, y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2$，其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求正交矩阵 Q.

六、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

练习 4.2

(4.1.2 特征值与特征向量)

一、填空题

1. 设 $\lambda=4$ 是 n 阶矩阵 A 的一个特征根，则行列式 $|4E-A|=$ ______，$R(4E-A)$ ______ n，齐次线性方程组 $(4E-A)x=O$ 一定有 ________ 解.

2. 已知 3 阶矩阵 A 的三个特征值为 1，2，3，则 A^{-1} 的特征值为 ________，$A^2+2A+3E$ 的特征值为 ________.

3. 设 A 为 n 阶方阵，$|A|\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位阵，若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值 ________.

4. 已知 $\xi=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

二、单项选择题

1. 已知 η_1，η_2 是方程 $(\lambda E-A)X=0$ 两个不同的解向量，则下列向量中必是 A 的对应于特征值 λ 的特征向量是(　　).

(A) η_1　　(B) η_2　　(C) $\eta_1-\eta_2$　　(D) $\eta_1+\eta_2$

2. 设 $\lambda=2$ 是 $|A|\neq 0$ 的矩阵的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值为(　　).

(A) $\frac{4}{3}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{2}$

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-1，0 的充分必要条件是(　　).

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $A=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

三、求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

四、设 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & a & 3\\ 6 & -6 & b\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=4$，试求 a，b 的值.

五、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，证明 $x+y=0$.

六、若 α_1，α_2 是 n 阶矩阵 A 属于不同特征值 λ_1，λ_2 的特征向量，证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

七、若矩阵 A 满足对任意的 x_1，x_2，x_3 均有 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2+x_3\\2x_1-x_2+x_3\\x_2-x_3\end{pmatrix}$.

（1）求矩阵 A；

（2）求可逆矩阵 P 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，使得 $P^{-1}AP=\boldsymbol{\Lambda}$.

练习 4.3

(4.2.1 相似矩阵与矩阵可对角化的条件)

一、填空题

1. n 阶矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 __________ 个线性无关的特征向量.

2. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 如果有 n 阶可逆矩阵 P, 使 __________ 成立, 则称 A 与 B 相似.

3. 若 4 阶方阵 A 与 B 相似, 方阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, 则行列式 $|B^{-1}-E|=$ ________.

二、单项选择题

1. 设 A、B 都是 n 阶方阵, 且 A 与 B 有相同的特征值, 并且 A、B 都有 n 个线性无关的特征向量, 则(　　).

(A) $A\sim B$　　　　(B) $A=B$

(C) $A\neq B$, 但 $|A-B|=0$　　　　(D) A 与 B 不一定相似, 但 $|A|=|B|$

2. 若矩阵 A 与 B 相似, 则(　　).

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$　　　　(B) $|A|=|B|$

(C) A, B 有相同的特征向量　　　　(D) A 与 B 均与一个对角矩阵相似

3. 设 n 阶方阵 A 与 B 相似, 则必有(　　).

(A) A 与 B 同时可逆或不可逆　　　　(B) A 与 B 有相同的特征向量

(C) A 和 B 均与同一个对角矩阵相似　　　　(D) 矩阵 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 相等

4. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似　　　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似

三、已知三阶方阵 A 的特征值为 1, -1, 2, 设 $B=A^3-5A^2$, 试求:

(1) B 的特征值;

(2) 与 B 相似的对角阵;

(3) $|B|$;

(4) $|A-5E|$.

四、已知 $A=\begin{pmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{pmatrix}$, 求 A^{100}.

五、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 a, b 的值;　(2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

六、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & a & b\end{pmatrix}$ 仅有两个不同的特征值，若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵，求 a，b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

七、设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明：$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵；

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=0$，求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

练习 4.4

(4.2.2 实对称矩阵的对角化)

一、填空题

1. 若 λ 是实对称矩阵 A 的特征方程的 r 重根，则秩 $R(\lambda E-A)=$ ________，从而对应特征值 λ 恰有 ________ 个线性无关的特征向量.

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&\alpha\end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&\beta\end{bmatrix}$ 相似，则 $\alpha=$ ________，$\beta=$ ________.

3. 设 A 为实对称矩阵，若 $A^2=O$，则 $A=$ ________.

二、选择题

设 A 为 3 阶矩阵，则“A^3-A^2 可对角化”是“A 可对角化”的(　　).

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

三、已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&-1&0\\0&-1&1&1\\-1&0&1&1\end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 成为对角阵.

四、设 A 为 3 阶实对称矩阵，$\lambda_1=8$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ 是其特征值，已知对应于 $\lambda_1=8$ 的特征向量为 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$，对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的一个特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，试求(1) 参数 k；(2) 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的另一个特征向量；(3) 矩阵 A.

五、设 $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}$，求 $\varphi(A)=A^{10}-5A^9$.

六、设 A 为 3 阶矩阵，α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 -1, 1 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$,

(1) 证明 α_1, α_2, α_3, 线性无关；

(2) 令 $P=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.

七、证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

练习 4.5

(4.3.1 二次型及其标准形)

一、填空题

1. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 - x_2x_4$ 的矩阵形式________________________.

2. 若二次型 $f = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz$ 经正交变换化为 $f = y_1^2 + 4y_2^2$，则 a = ____________.

3. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形为 $f = 4y_1^2 - 3y_2^2$，则其规范形的矩阵为 ____________.

二、单项选择题

1. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2$ 的矩阵为(　　).

(A) A　　(B) A^2　　(C) $A^{\mathrm{T}}A$　　(D) AA^{T}

2. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_3)^2 - 4(x_2 - x_3)^2$ 的规范型为(　　).

(A) $y_1^2 + y_2^2$　　(B) $y_1^2 - y_2^2$

(C) $y_1^2 + y_2^2 - 4y_3^2$　　(D) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

3. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下可化成 $y_1^2 - 2y_2^2 + 3y_3^2$，则二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式与迹分别为(　　).

(A) $-6, -2$　　(B) $6, -2$

(C) $-6, 2$　　(D) $6, 2$

三、用正交换变换法化二次型 $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$ 成标准形.

四、用配方法化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 成标准形.

五、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)x$ 的秩为 2，

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$，将 f 化为标准形.

六、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$，记 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$，$\beta = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}}$.

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^{\mathrm{T}} + \beta\beta^{T}$;

(2) 若 α，β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

七、已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形;

(2) 证明 $\min\limits_{x\neq 0}\dfrac{f(x)}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = 2$.

练习 4.6

(4.3.2 正定二次型)

一、填空题

1. 设实二次型 $Q(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_1x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__________.

2. 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 a 的取值范围为__________.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&k&0\\0&0&k-2\end{pmatrix}$ 为正定实对称矩阵，则 k 满足条件__________.

二、单项选择题

1. n 阶实对称矩阵 A 正定的充要条件是(　　).

(A) A 的所有特征值非负　　(B) $R(A)=n$

(C) 所有 k 阶子式为正($1\leqslant k\leqslant n$)　　(D) A^{-1} 是正定矩阵

2. 设 n 阶方阵 A 为正定矩阵，下面结论不对的是(　　).

(A) A 可逆　　(B) A^{-1} 也是正定矩阵

(C) $|A|>0$　　(D) A 的所有元素全为正

3. 矩阵(　　)不是正定矩阵.

(A) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&2&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&3&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$，若 $f(x, y)=|xA+yB|$ 是正定二次型，则 a 的取值范围是(　　).

(A) $(0, 2-\sqrt{3})$　　(B) $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$

(C) $(2+\sqrt{3}, 4)$　　(D) $(0, 4)$

5. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为(　　).

(A) 2, 0　　(B) 1, 1

(C) 2, 1　　(D) 1, 2

三、判别下列二次型的正定性：

1. $f=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$.

2. $f=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$.

四、已知二次型：$f(x_1, x_2, x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2：

1. 求参数 c 及此二次型对应方阵的特征值.

2. 指出方程 $f(x_1, x_2, x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

五、设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1，1，-2，矩阵 A 对应的特征向量依次为 $\alpha_1=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求矩阵 A；

(2) 求 A^{2009}；

(3) 判断 A 所对应的二次型是否为正定二次型.

六、设 A，B 是 n 阶正定矩阵，证明 $A+B$ 也是正定矩阵.