练习 1.1

(1.1 函数及其性质)

一、填空题

1. 已知 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=$ ________, 其定义域是 ________.

2. 函数 $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 的值域为 ______________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}5 & x<2\\ 3 & 2\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 3\end{cases}$ $a>0$, 则 $\dfrac{f(2+a)}{f(2-a)}=$ ________.

4. 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$, 其中 a, b, c 为常数且 $|a|\neq|b|$, 则 $f(x)$ = ________.

二、设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且对 $\forall x, y$, 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 且 $f(x)\neq 0$, 证明 $f(x)$ 为偶函数.

三、已知函数 $y=f(x)=\dfrac{3x+2}{x+m}\left(m\neq\dfrac{2}{3}\right)$, 求它的反函数, 若函数 $f(x)$ 的图形与它的反函数的图形重合, 求 m.

四、以下函数中哪些是初等函数? 说明理由

1. $y=|x|$;　　2. $y=x^x(x>0)$;

3. $y=\begin{cases}-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \sin x, & \pi<x\leqslant 2\pi;\end{cases}$　　4. $y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

五、设 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0.\end{cases}$

求复合函数 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

六、把半径为 R 的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积 V 表示为 α 的函数.

七、设函数 $y=f(x)$, $x\in(-\infty, +\infty)$ 的图形与 $x=a$, $x=b(a<b)$ 均对称, 证明 $y=f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

八、设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

练习 1.2

(1.2 数列的极限)

一、填空题

1. 设 $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$，存在正整数 $N=$ ________ 时，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-1|<10^{-4}$ 成立；对于 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N=$ ________，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-1|<\varepsilon$ 成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.（注：答案不唯一）

2. 对于任意正数 ε，存在正整数 $N=$ __________，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}=0$.（注：答案不唯一）

3. 对于 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|<2\varepsilon$ 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ________.

4. 设 $\{x_n\}$ 为任一数列，又设对于任意正数 ε，存在正整数 N_1，N_2，当 $n>N_1$ 时，$|x_{2n}-A|<\varepsilon$，当 $n>N_2$ 时，$|x_{2n+1}-A|<\varepsilon$，则当 n 大于正整数 $N=$ ________________ 时 $|x_n-A|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ __________.

二、用极限定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

三、若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，并举例说明反过来未必成立.

四、设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

练习 1.3

(1.3 函数的极限)

一、填空题

1. 极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的定义是：对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 ______ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

2. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义是：对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 ________ 时，就有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 对于任意的正数 ε，存在正数 $\delta=$ ____，当 ______________ 时 $|5x+2-12|<\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

二、求 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限，并说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是否存在.

三、用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$，且 δ 等于多少，则当 $|x-2|<\delta$ 时，$|x^2-4|<0.001$？

四、用极限定义证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

五、用极限定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左、右极限各自存在且相等.

练习 1.4

(1.4 极限的运算法则)

一、判断题(正确的结论打“√”，错误的结论打“×”)：

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在.　(　)
2. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 不存在.　(　)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=A$.　(　)
4. 若$f(x)>g(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.　(　)
5. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.　(　)
6. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$. 这样计算正确吗？　(　)

二、填空题

1. 已知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$，则 $a=$ ________，$b=$ ________；
2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则 $a=$ ________，$b=$ ________；
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{30}(3x-2)^{40}}{(2x+1)^{70}}=$ ________.

三、计算题

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$；
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$；
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$；
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

四、设$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x}+1 & x>0 \\ 2b+x^2 & x\leqslant 0\end{cases}$，问 b 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在？

练习 1.5

(1.5 极限存在准则 两个重要极限)

一、填空题

1. 设 m, n 为正整数, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=$ ________;

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$ ________ ;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n}=$ ________.

二、求下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

三、设对于每一个整数 $m\geqslant 0$, 由条件 $a_m(0)=\dfrac{d}{2^m}$(d 为非零常数) 和 $a_m(j+1)=a_m^2(j)+2a_m(j)$, $j\geqslant 0$. 定义数列 $\{a_m(j)\}$, $j=0,1,2,\cdots$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n(n)$.

四、利用极限存在准则证明以下极限存在, 并求极限.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{[x]}$, 其中 $[x]$ 表示取 x 的整数部分.

2. 若 $x_1=a>0$, $y_1=b>0$, $a<b$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$, 试证数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

练习 1.6

(1.6 无穷小与无穷大)

一、填空题

1. 当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x)$ 是 x 的 ________ 无穷小量；

2. 当 $x \to \infty$ 时，若 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$ 为无穷大量，则 p 为 ________，q 为 ________，若 $f(x)$ 为无穷小量，则 $p=$ ________，$q=$ ________；

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^3\cos\dfrac{1}{x^3}=$ ______.

4. 设当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小，则正整数 $n=$ ________.

二、选择题

1. 当 $x \to 0$ 时，$\arctan x$ 与 $\dfrac{ax}{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $a=$ (　　)

(A) -1；　　(B) 1；　　(C) 2；　　(D) -2.

2. 当 $x \to \infty$ 时，若 $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} \sim \dfrac{1}{x+1}$，则 a，b，c 为(　　)

(A) $a=0$，$b=1$，c 任意；　　(B) $a=0$，$c=1$，b 任意；

(C) $b=0$，$c=1$，a 任意；　　(D) $a=0$，$b=1$，$c=0$.

3. 当 $x \to 1$ 时，$f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$ 与 $g(x)=1-x$ 都是无穷小，则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　)阶无穷小.

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) $\dfrac{1}{3}$；　　(D) 3.

三、当 $x \to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，试求常数 a 的值.

四、已知 $f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$ 是 x 趋于 1 时 $(x-1)^2$ 的高阶无穷小，求常数 a，b，c.

练习 1.7

(1.7 函数的连续性)

一、讨论下列函数在指定点的连续性，并将结论填入括号内

1. $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处（　　）；

2. $g(x)=x|x|$ 在点 $x=0$ 处（　　）；

3. $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处（　　）.

二、下列函数在指定点间断，说明这些点属于哪一类间断点，如果是可去间断点，则补充或改变函数的定义使它连续.

1. $x=1$，$x=2$ 分别是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的 ________ 间断点，补充 ________，则函数在此点连续.

2. $x=0$ 为函数 $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{3x}$ 的 ________ 间断点，补充定义 $f(0)=$ ________，则函数在 $x=0$ 处连续.

3. $x=0$ 为 $f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 的 ______ 间断点，为 $f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的 ______ 间断点.

三、设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，求 a，b 的值.

四、已知 $f(x)=\begin{cases}(1+3x)^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ \dfrac{b\sin 3x}{x}, & x>0,\end{cases}$ 问

1. 当 a，b 为何值，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在？

2. 当 a，b 为何值，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续？

五、求下列函数的极限

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$；

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^{\cos\frac{1}{x}}$；

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$.

六、证明方程 $x=a\sin x+b\ (a>0,\ b>0)$ 至少有一正根，并且它不超过 $a+b$.

七、设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$，证明在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\xi$.

练习 2.1

(2.1.1 引例　2.1.2 导数概念　2.1.3 导数的几何意义 2.1.4 可导与连续的关系　2.1.5 求导数的例题 · 导数基本公式表)

一、填空题

1. 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[3]{x}}}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________；

2. 设 $f(x)=x^2$，则 $f[f'(x)]=$ ________，$f'[f(x)]=$ ________；

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\mathrm{e}^{f(x)}-1}=2$，则 $f'(0)=$ ________.

二、选择题

1. 下列命题正确的是(　　)

(A) 初等函数在其定义区间内可导；

(B) $f'(a)=(f(a))'$，其中 a 为常数；

(C) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，则 $f'(x_0)$ 存在；

(D) 可导的偶函数的导数是奇函数.

2. 设 $f(x)=x|x|$ 则 $f'(0)=$(　　)

(A) 0；　　(B) 1；

(C) -1；　　(D) 不存在.

3. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 可导，a，b 为常数，则

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{\Delta x}=(\quad)$$

(A) $abf'(x_0)$；　　(B) $(a+b)f'(x_0)$；

(C) $(a-b)f'(x_0)$；　　(D) $\dfrac{a}{b}f'(x_0)$.

三、设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，求下列极限值.

(1) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-3h)}{h}$；(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x_0f(x)-xf(x_0)}{x-x_0}$.

四、$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+b, & x\leqslant0\\ \sin ax, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a，b，$f'(x)$.

五、设函数 $f(x)$ 在点 a 可导，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 为趋于零的正数数列，

求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a+\alpha_n)-f(a-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$.

六、设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$　$(a_i\in\boldsymbol{R},\ i=1,2,\cdots,n)$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，证明：$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant1$.

练习 2.2

(2.1.6 函数的和、差、积、商的导数　2.1.7 反函数的导数　2.1.8 复合函数的导数)

一、填空题

1. 已知$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，则$\dfrac{\mathrm{d}f(\sqrt{1-x^2})}{\mathrm{d}x}=$__________；

2. 设$y=\mathrm{e}^x+\ln x$，则$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$____________；

3. $y=2^{|\sin x|}$，则$y'=$________.

二、选择题

1. 已知$F(x)=f(g(x))$在x_0处可导则(　　)

(A)$f(x)$，$g(x)$都必须可导；　　(B)$f(x)$，$g(x)$不一定都可导；

(C)$g(x)$一定可导；　　(D)$f(x)$必须可导.

2. 设$f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且在$x=a$处可导，则$f'(0)=$(　　)

(A)$2a$；　　(B)$2b$；

(C)$2b\varphi'(a)$；　　(D)$2\varphi'(a)$.

3. 要使函数　$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$　在$x=0$处的导函数连续，则n应取何值(n为自然数)？　(　　)

(A)$n=0$；　　(B)$n=1$；

(C)$n=2$；　　(D)$n\geqslant 3$.

三、计算下列各函数的导数

1. $y=\arcsin\sqrt{\ln(\cos x+1)}$；

2. $y=\dfrac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$；

3. $y=(\arccos x)^2\left(\ln^2\arccos x-\ln\arccos x+\dfrac{1}{2}\right)$，$(|x|<1)$.

四、设$f(x)$、$g(x)$可导，且$f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，求函数$y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$的导数.

五、已知$y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

练习 2.3

（2.1.9 高阶导数　2.1.10 隐函数的求导法则）

一、填空题

1. 设 $y=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-2008)$，则 $y^{(2009)}=$ ________________；

2. 设 $f(x)=\ln(3+7x-6x^2)$，则 $f^{(n)}(1)=$ ________；

3. 设 $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(50)}=$ ________.

二、选择题

1. 设函数 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 $n=$（　　）；

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3

2. $\arcsin x\cdot\ln y-\mathrm{e}^{2x}+\tan y=0$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\substack{x=0\\ y=\frac{\pi}{4}}}=$（　　）；

(A) $1-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\pi}{4}$；　(B) $2-\ln\dfrac{\pi}{4}$；

(C) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\pi}{4}-1$；　(D) $\dfrac{1}{2}$.

3. 已知 $f'(x)=a\mathrm{e}^{2x}(a>0)$，则 $f(x)$ 的反函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2a\mathrm{e}^{2x}}$；　(B) $\dfrac{2}{a\mathrm{e}^{2x}}$；　(C) $\dfrac{a\mathrm{e}^{2x}}{2}$；　(D) $-\dfrac{2}{a^2\mathrm{e}^{4x}}$.

三、求下列函数 $y=y(x)$ 的 n 阶导数：

(1) $y=\ln(x^2+3x-4)$.　(2) $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$.　(3) $y=\sin^6x+\cos^6x$.　(4) $y=x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

四、设 $u=f[\varphi(x)+y^2]$，其中 x，y 满足方程 $y+\mathrm{e}^y=x$，且 $\varphi(x)$，$f(x)$ 均为二阶可导，试求：$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}$.

五、求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 点处的 100 阶导数值.

练习 2.4

（2.1.11 对数求导法　2.1.12 参数方程所确定的函数的导数）

一、填空题

1. $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-x^2}}$，则 $y'=$ ________；

2. 设$\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$ ________；

3. 已知$\begin{cases}x=f'(t)\\ y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，其中 $f''(t)\neq 0$ 可导，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________.

二、选择题

1. 已知$\begin{cases}x=f(t)-\pi\\ y=f(\mathrm{e}^{3t}-1)\end{cases}$，其中 f 可导，$f'(0)\neq 0$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$（　　）

(A) 0；　　(B) 1；

(C) $f'(0)$；　　(D) 3

2. $\sqrt[y]{x}=\sqrt[x]{y}$，则 $y''\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}}=$（　　）

(A) 0；　　(B) 1；

(C) 2；　　(D) 不存在

3. 曲线$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$在 $t=2$ 处的切线方程为（　　）

(A) $4x+3y-12a=0$；　　(B) $3x-4y+6a=0$；

(C) $4x-3y-12a=0$；　　(D) $3x+4y-12a=0$.

三、$\begin{cases}x=\ln\cos t,\\ y=\sin t-t\cos t,\end{cases}$　求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

四、对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程.

五、设$\begin{cases}x=2t-1\\ t\mathrm{e}^y+y+1=0\end{cases}$确定 $y=y(x)$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

练习 2.5

(2.1.13 微分概念　2.1.14 微分的求法 · 微分形式不变性)

一、填空题

1. 已知 $xy = e^{x+y}$，则 $dy =$ ________；

2. $d\left(\qquad\right) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}dx$　($a \in \mathbf{R}$，且 $a \neq 0$)；

3. $y = (1 + \sin x)^x$，则 $dy\big|_{x=\pi} =$ (　　　).

二、选择题

1. 函数 $y = f(x)$ 在某点 x 处有增量 $\Delta x = 0.2$，对应的函数增量的主部等于 0.8，则 $f'(x) =$ (　　)

(A) 0.4;　　(B) 0.16;

(C) 4;　　(D) 1.6

2. 若 $f(x)$ 为可微函数，则 dy 为(　　)

(A) 与 Δx 无关；　　(B) 为 Δx 的线性函数；

(C) 当 $\Delta x \to 0$，为 Δx 的高阶无穷小；　(D) 与 Δx 为等价无穷小.

3. 设 $f(x) = x^n \sin\dfrac{1}{x}$($x \neq 0$，$n$ 为自然数) 且 $f(0) = 0$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处(　　)

(A) 仅当 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^n \sin\dfrac{1}{x} = f(0) = 0$ 时才可微；

(B) 在任何条件下都可微；

(C) 当且仅当 $n > 1$ 时才可微；

(D) 因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无定义，所以不可微.

三、$y = \ln\arctan\dfrac{1}{x}$，求 dy.

四、设 $y = e^{-x}\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{3 - x^3}}$，求 dy.

五、设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$ 其中 $f(x)$ 可微，求 dy.

练习 2.6

(2.2.1 微分中值定理)

一、填空题

1. 函数 $y = px^2 + qx + r$ 在区间$[a, b]$满足 Lagrange 定理条件的点 $\xi =$ ________;

2. 函数 $f(x) = \sin x$ 与 $F(x) = x + \cos x$ 在区间$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$上使 Cauchy 定理结论成立的点$\xi =$ ______________;

3. 设函数 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$,则 $f'(x) = 0$ 有 ________ 个零点,它们分别位于区间 ________________________________ 内.

二、选择题

1. 下列函数中在$[1, e]$上满足 Lagrange 中值定理条件的是(　　)

(A) $\ln(\ln x)$;　　(B) $\ln x$;

(C) $\dfrac{1}{\ln x}$;　　(D) $\ln(2-x)$.

2. 若 $a^2 - 3b < 0$ 则方程 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$(　　)

(A) 无实根;　　(B) 有惟一的实根;

(C) 有 3 个实根;　　(D) 有重实根.

3. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数,且 $a_1 - \dfrac{1}{3}a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2n-1}a_n = 0$,则函数

$f(x) = a_1\cos x + a_2\cos 3x + \cdots + a_n\cos(2n-1)x$ 在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$内(　　)

(A) 至少有一个零点;　　(B) 至少有 2 个零点;

(C) 至少有 n 个零点;　　(D) 至少有$(2n-1)$个零点.

三、设$f(x)$在$[a, b]$上连续,在(a, b)内可导$(a \geqslant 0)$,证明:存在$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b)$,使

$$f'(\xi_1) = (b+a)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2} = (b^2 + ab + a^2)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3^2}.$$

四、设函数$f(x)$,$g(x)$在$[a, b]$上连续,在(a, b)内具有二阶导数且存在相等的最大值,$f(a) = g(a)$,$f(b) = g(b)$,证明:存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

五、设$f(x)$在$[a, b]$上二阶可微,$f(a) = f(b) = 0$,$f'_+(a)f'_-(b) > 0$,则方程$f''(x) = 0$ 在(a, b)内至少有一个根 .

六、设$f(x)$在$[a, b]$上可微,且 a 与 b 同号,证明:存在 $\xi \in (a, b)$,使

(1) $2\xi[f(b) - f(a)] = (b^2 - a^2)f'(\xi)$;

(2) $f(b) - f(a) = \xi\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)f'(\xi)$.

练习 2.7

（2.2.2Taylor 公式）

一、填空题

1. 函数 $f(x)=x^2e^x$ 在 $x=1$ 处的高阶导数 $f^{(100)}(1)=$ ____________；

2. $x^4-5x^3+x^2-3x+4$ 按 $(x-4)$ 的乘幂展开的多项式为 ______________；

3. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4-8x^3+10x-7}-ax-b\right)=0$，则 $a=$ ________________，$b=$ ____________.

二、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[2x+\ln(1-2x)]}$.

三、设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，试求 $f(0)$，$f'(0)$ 及 $f''(0)$.

四、已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=C\neq0$，试确定常数 n 和 C 的值.

五、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，$f'(1)=1$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)=2$.

六、设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，求证：在 $(-1,1)$ 上存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$

练习 2.8

(2.2.3 洛必达法则)

一、填空题

1. 当 $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 的高阶无穷小，则 $a=$ ________，$b=$ ________；

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^n}=$ ________；

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^m}=a(\neq 0)$，则 $m=$ ________，$a=$ ________.

二、选择题

1. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　)；

(A) 0；　(B) 6；　(C) 36；　(D) ∞.

2. 当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为(　　)；

(A) 1；　(B) 2；　(C) 3；　(D) 4.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有(　　).

(A) $b=4d$；　(B) $b=-4d$；　(C) $3a=4c$；　(D) $a=-4c$.

三、计算下列极限

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$；

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$；

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$；

4. $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x)$；

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$；

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (n 为自然数).

四、已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=C\neq 0$，试确定常数 n 和 C 的值.

五、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有连续二阶导函数，且 $\varphi(0)=1$.

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(x)$.

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

六、设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

练习 2.9

（2.3.1 函数的单调性的判定　2.3.2 函数的极值及其求法 2.3.3 最大值及最小值的求法）

一、填空题

1. 函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调递减区间为 ________，单调递增区为 ________；

2. 函数 $y=\begin{cases} x^{3x}, & x>0 \\ x+1, & x\leqslant 0 \end{cases}$，当 $x=$ ________，$y=$ ________ 为极小值，当 $x=$ ________，$y=$ ________ 为极大值；

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 ________，最小值为 ________.

二、选择题

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$ 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处（　　）

（A）不可导；　　（B）可导且 $f'(a)\neq 0$；

（C）有极大值；　　（D）有极小值.

2. 函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k(k>0)$ 在 $(0,+\infty)$ 的零点个数为（　　）

（A）1；　　（B）2；

（C）3；　　（D）0.

3. 设方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有一个实根，则 k 的取值范围为（　　）

（A）$\left(-\infty,\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right]$；　　（B）$(-\infty,0]$；

（C）$\left\{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right\}\cup(-\infty,0)$；　　（D）$\left\{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\right\}\cup(-\infty,0]$.

三、设 $x\in(0,1)$，证明：

1. $(1+x)\ln^2 1+x<x^2$；

2. $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

四、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明 $f(x)\geqslant x$.

五、已知某物资全年需要量为 a 吨，分若干批生产，每批生产的准备费为 1440 元，除准备费外，每批生产中直接消耗的费用与产量的平方成正比. 当每批生产 50 吨时，直接消耗的生产费用是 1000 元. 求每批生产多少吨时全年的总费用最省？

练习 2.10

(2.3.4 曲线的凹凸性及其判定法　2.3.5 曲线的拐点及其求法 2.3.6 曲线的渐近线　2.3.7 函数图形的描绘方法)

一、填空题

1. $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的斜渐近线方程为 ________;

2. 曲线 $y=\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$ 的渐近线的条数为 ________;

3. 曲线 $y=x\cdot\sqrt[3]{(x-1)^5}$ 在 ________ 内是凹的，在 ________ 内是凸的，拐点为 ____________.

二、选择题.

1. 下列说法中正确的是 (　　)

(A) 若$(x_0,f(x_0))$为拐点，则$f''(x_0)=0$;

(B) 若$f''(x_0)=0$，则$(x_0,f(x_0))$必为拐点;

(C) 若$(x_0,f(x_0))$为拐点，则在$(x_0,f(x_0))$处曲线必有切线;

(D) 以上说法都不正确.

2. 设$f(x)$有二阶连续导数，且$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则　(　　)

(A)$f(0)$是$f(x)$的极大值;

(B)$f(0)$是$f(x)$的极小值;

(C)$(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$拐点;

(D)$f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$拐点.

3. 设$f(x)$的导数在$x=a$处连续，又$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$则(　　)

(A)$x=a$是$f(x)$的极小值点;

(B)$x=a$是$f(x)$的极大值点;

(C)$(a,f(a))$是曲线$y=f(x)$拐点;

(D)$x=a$不是$f(x)$的极值点，$(a,f(a))$也不是曲线$y=f(x)$拐点.

三、证明不等式：(1) 当$0<x<\pi$时，有$\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

(2)$\tan x+\tan y>2\tan\dfrac{x+y}{2}$,　$0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$.

四、试决定$y=k(x^2-3)^2$中k的值，使曲线在拐点处的法线通过原点.

五、描绘曲线$y=\dfrac{2}{1+3e^{-x}}$的图形.

练习 2.11

(2.3.8 弧微分·曲率　2.3.9 曲率圆·曲率半径)

一、填空题

1. 椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率为 ________;

2. 曲线 $y=\ln x$ 上曲率 $k(x)$ 的最大值 = ________;

3. 设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=0$ 处与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 相切，又有共同的曲率半径，则 $a=$ ________, $b=$ ________, $c=$ ________.

二、选择题

1. 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内（　　）

(A) 有极值点，无零点;　　(B) 无极值点，有零点;

(C) 有极值点，有零点;　　(D) 无极值点，无零点.

2. 设函数 $f_i(x)(i=1, 2)$ 具有二阶连续导数，且 $f''_i(x_0)<0(i=1, 2)$，若两条曲线 $f_i(x)(i=1, 2)$ 在点 (x_0, y_0) 处具有公切线，$y=g(x)$ 且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内有（　　）

(A) $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$;　　(B) $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$;

(C) $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$;　　(D) $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$.

3. 设 $y=f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=t+\ln(1-t) \\ y=2x-t \end{cases}$，其中 t 是参数，则 $y=f(x)$ 在 $t=-1$ 对应点处的曲率半径 R 及曲率圆的位置（　　）

(A) $R=2$，在切线上方;　　(B) $R=2$，在切线下方;

(C) $R=\dfrac{1}{2}$，在切线上方;　　(B) $R=\dfrac{1}{2}$，在切线下方.

三、求双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$ 在 $\theta=0$ 处的曲率及曲率半径.

四、一重 5 t 的汽车以每小时 21.6 km 的速度在跨度 10 m、拱高 0.25 m 抛物线型拱桥上行驶，求它越过桥顶时对桥面的压力.

五、t 为何值时，曲线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$，$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的曲率最小？求出最小曲率，写出该点的曲率半径.

练习 3.1

(3.1.1 原函数与不定积分的概念　3.1.2 不定积分的性质 3.1.3 基本积分表)

一、选择题

1. 若$\int f'(x^3)\mathrm{d}x = x^3 + C$，则$f(x) = ($　　$)$.

(A) $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$;　　(B) $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$;

(C) $x^3 + C$;　　(D) $x + C$.

2. 设$f(x^2 - 1) = \ln\frac{x^2}{x^2 - 1}$，且$f(\varphi(x)) = \ln(1 + x)$，则不定积分$\int\varphi(x)\mathrm{d}x = ($　　$)$

(A) $-\ln|x|$;　　(B) $-\ln|x| + C$;

(C) $\ln|x|$;　　(D) $\ln|x| + C$.

3. 设$f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$，则不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x = ($　　$)$

(A) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + Cx$;　　(B) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + Cx + C$;

(C) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C$;　　(D) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$.

二、填空题

1. 设$f(x)$在$(0, +\infty)$内可导，且当$x > 0$时，$\int f(x^3)\mathrm{d}x = (x - 1)\mathrm{e}^{-x} + C$，则$f(1) =$ ____________;

2. 已知$f(x)$的一个原函数为$\frac{\sin x}{1 + x\sin x}$，则$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x =$ ________________.

3. 设$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$及$f(0) = 2$，则函数$f(x) =$ ____________.

三、计算解答

1. (1) $\int\frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

2. 已知$F(x)$在$[-1, 1]$上连续，在$(-1, 1)$内$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$，且$F(1) = \frac{3\pi}{2}$，求$F(x)$.

3. 已知$f(x) = f(x + 4)$，$f(0) = 0$，且在$(-2, 2)$内$f'(x) = |x|$，求$f(9)$.

练习 3.2

(3.1.4 换元积分法)

一、选择题

1. 已知$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f'(\arcsin x)\mathrm{d}x = 2\arcsin^2 x + C$，且$f(0)=1$，则$f(x)=$(　　)

(A)$2x^2+1$；　(B)$2\arcsin^2 x$；　(C)$2x^2$；　(D)$2\arcsin^2 x + C$.

2. 设$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，则$\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$(　　)

(A)$-\frac{1}{x}+C$；　(B)$-\ln x + C$；　(C)$\frac{1}{x}+C$；　(D)$\ln x + C$.

3. 用换元法计算不定积分$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$时，使用变量代换(　　)是不适宜的.

(A)$t=\sqrt{x^2+1}$；　(B)$x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$；

(C)$x=\frac{1}{t}$；　(D)$t=x^2$.

二、填空题

1. 设$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x \cdot \ln x + C$，则$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=$________________；

$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=$________________.

2. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=$________________.$(a>0)$

3. 设$a\neq 0$，不定积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)\sqrt{\ln(ax+b)}}=$________________.

三、计算下列不定积分：

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 5\cos^2 x}$；　2. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x$；　3. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

练习 3.3

(3.1.5 分部积分法)

一、选择题

1. 设$\dfrac{\ln x}{x}$为$f(x)$的一个原函数，则$\int xf'(x)\mathrm{d}x=$(　　)

(A) $\dfrac{\ln x}{x}+C$;　(B) $\dfrac{\ln x+1}{x^2}+C$;　(C) $\dfrac{1}{x}+C$;　(D) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2\ln x}{x}+C$.

2. 设 e^{-x} 是$f(x)$的一个原函数，则$\int xf(x)\mathrm{d}x=$(　　)

(A) $e^{-x}(1-x)+C$;　(B) $e^{-x}(x+1)+C$;

(C) $e^{-x}(x-1)+C$;　(D) $-e^{-x}(x+1)+C$.

3. 甲、乙两学生分别用以下的不同方法计算不定积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$:

甲: $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C$;

乙: $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\int\dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\mathrm{d}t$，移项合并得$\int\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=C$.

你的判断是(　　)

(A) 甲的计算方法正确而乙的计算方法不正确;

(B) 甲的计算方法不正确而乙的计算方法正确;

(C) 甲、乙的计算方法都正确;

(D) 甲、乙的计算方法都不正确.

二、填空题

1. 设$f(x)=e^x\cos x$，则$\int xf''(x)\mathrm{d}x=$____________________.

2. $\int x\sec^2 x\mathrm{d}x=$____________________.

3. $\int\arctan\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=$____________________.

三、计算下列不定积分

1. $\int x^2\arccos x\mathrm{d}x$;

2. $\int\dfrac{x\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$.

3. $\int\dfrac{x+1}{x(1+xe^x)}\mathrm{d}x$;

4. $\int e^x\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

练习 3.4

(3.1.6 有理函数的分解　3.1.7 有理函数的积分　3.1.8 三角函数的有理式的积分)

一、选择题

1. $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x^2-2x+1)}$ 的部分分式的形式为(　　)

(A) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+1}$;　　(B) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x^2-2x+1}$;

(C) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx}{x^2-2x+1}$;　　(D) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$.

2. 下列不定积分计算不正确的是(　　)

(A) $\displaystyle\int\frac{x}{2+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(2+x^2)+C$;

(B) $\displaystyle\int\frac{x^2}{2+x^2}dx=1-2\ln(2+x^2)+C$;

(C) $\displaystyle\int\frac{x^3}{2+x^2}dx=\frac{x^2}{2}-\ln(2+x^2)+C$;

(D) $\displaystyle\int\frac{x}{(2+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+x^2}+C$.

3. 下列不定积分的计算中, 使用分部积分法失效的是(　　)

(A) $\int e^x\sin x\,dx$;　　(B) $\displaystyle\int\frac{e^x}{x}dx$;

(C) $\int x^2e^x dx$;　　(D) $\int x\arctan x\,dx$.

二、填空题

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=$ ________________.

2. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}=$ ________________.

3. $\displaystyle\int\frac{\sin x-\cos x}{2\sin^2x+3\cos^2x}dx=$ ________________.

三、计算

1. $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.　　2. $\displaystyle\int\frac{x(1+x^2)}{1+x^4}dx$;　　3. $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}dx$.

练习 3.5

(3.1.9 简单无理函数的积分　3.1.10 关于积分问题的一些补充说明)

一、选择题

1. 设 $R(u, v, w)$ 是变量 u, v, w 的有理式，则计算不定积分 $\int R(x, \sqrt[p]{ax+b}, \sqrt[q]{ax+b})\mathrm{d}x$ 时应做的变量代换为(　　)(其中 p, q 是互质的正整数，r, s 分别是 p, q 的最小公倍数和最大公约数)；

(A) $t = \sqrt[p]{ax+b}$；　　(B) $t = \sqrt[q]{ax+b}$；

(C) $t = \sqrt[r]{ax+b}$；　　(D) $t = \sqrt[s]{ax+b}$.

2. $\int \dfrac{7\cos x - 3\sin x}{5\cos x + 2\sin x}\mathrm{d}x =$ (　　)

(A) $x + \ln|2\sin x + 5\cos x| + C$　　(B) $x + \ln|3\sin x - 5\cos x| + C$

(C) $x - \ln|2\sin x + 4\cos x| + C$；　　(D) $x + \ln|2\cos x + 5\sin x| + C$

二、填空题

1. $\int \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x =$ ____________；

2. $\int \sin(\ln x)\mathrm{d}x =$ ____________.

3. $\int \dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x =$ ____________.

三、计算

1. $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}\mathrm{d}x$；　　2. $\int \sqrt{\dfrac{x}{1 - x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.　　3. $\int \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\mathrm{d}x$；$(a < b)$

四、设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x \geqslant 0$ 时有 $F(x) \cdot f(x) = \sin^2 2x$，又 $F(0) = 1$，$F(x) \geqslant 0$，求 $f(x)$.

练习 3.6

（3.2.1—3.2.2 定积分的概念与性质）

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\,dx =$ （ ）.

（A） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$；　　（B） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$；

（C）. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$；　　（D） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

2. $I_1 = \int_0^1 e^x\,dx$，$I_2 = \int_0^1 (1+x)\,dx$，则下列结论成立的是（　　）

（A）$I_1 > I_2$；　（B）$I_1 < I_2$；　（C）$I_1 \geqslant I_2$；　（D）$I_1 \leqslant I_2$.

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx =$ （　　）

（A）$f(b)$；　（B）$f(\xi)$；　（C）$f(a)$；　（D）以上结论都不对.

4. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则下列不正确的是（　）

（A）若在 $[a, b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒等于 0，则 $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

（B）若在 $[a, b]$ 上，$f(x) \geqslant 0$，且 $\int_a^b f(x)\,dx = 0$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

（C）若在 $[a, b]$ 上，$f(x) \leqslant g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

（D）若在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leqslant g(x)$，且 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$，则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x) \equiv 0$.

二、填空题

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)\,dt$，则 $f(1) =$ ________；

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n} + 2\sin\dfrac{2}{n} + \cdots + n\sin\dfrac{n}{n}\right)$ 表示成定积分 ________；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}(1 + \sqrt{2} + \cdots \sqrt{n})$ 表示成定积分 = ________（m 为正整数）.

三、计算解答

1. 证明：$\sqrt{\dfrac{2}{e}} \leqslant \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-x^2}\,dx \leqslant \sqrt{2}$；

2. 用定积分的定义计算由 $y = x + 1$ 及 $x = 1$，$x = 2$，$y = 0$ 所围成的图形的面积；

3. 已知 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = 2\ln 2 - 1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$.

练习 3.7

（3.2.3—3.2.4 积分中值定理与 Newton - Leibniz 公式）

一、选择题

1. 下列各式中正确的是(　　)

(A) $d\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(t)\mathrm{d}t$;　　(B) $\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=f(x)$;

(C) $\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(x)\mathrm{d}x=-f(x)$;　　(D) $\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(t)$.

2. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x t\, f(x^2-t^2)\mathrm{d}t\right]=$(　　)

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$　　(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

3. 设函数 $y=\int_0^x(t-1)\mathrm{d}t$，则 y 有(　　)

(A) 极小值 $\frac{1}{2}$;　　(B) 极小值 $-\frac{1}{2}$;

(C) 极大值 $\frac{1}{2}$;　　(D) 极大值 $-\frac{1}{2}$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=b(b\neq0)$，则常数 a，b 应分别为(　　).

(A) $1,\ \frac{1}{2}$　　(B) $\frac{1}{2},\ 1$　　(C) $0,\ 0$　　(D) $1,\ 1$

二、填空题

1. 设 $\int_1^x f(x)\mathrm{d}x=x[f(x)+1]$，则 $f(x)=$ ________;

2. $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x=$ ________;

3. $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\frac{t^2}{(x-\sin x)\sqrt{4+t}}\mathrm{d}t=$ ________;

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，则 $f(7)=$ ________.

三、计算解答

1. 设 $\int_0^x t\ln(1+t)\mathrm{d}t+\int_1^y\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$;

2. 设 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t-\int_0^{\mathrm{e}^x-1}\cos|t|\mathrm{d}t=0$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

四、设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得
$f(\xi)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x=g(\xi)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$.

练习 3.8

(3.2.5—3.2.6 定积分的换元积分法与分部积分法)

一、选择题

1. $\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x = $ (　　).

(A) $\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$　　(B) $\frac{1}{mn}\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x$

(C) $\frac{1}{m+1}\int_0^1 (1-x)^m\mathrm{d}x$　　(D) $\frac{1}{mn}\int_0^1 x^n(1-x)^m\mathrm{d}x$

2. 设函数 $f(x)$ 连续，则在下列变上限定积分定义的函数中，必为偶函数的是(　　)

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$;　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$;

(C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$;　　(D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

3. $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = $ (　　)

(A) e;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 4 .

二、填空题

1. 若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = $ ________;

2. $\int_{-1}^1(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x = $ ________;

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{x^2}, & -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2} \\ -1, & x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)\mathrm{d}x = $ ________;

4. 积分 $\int_0^{n\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x = $ ________.

三、计算下列积分：

1. (1) $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$

2. (1) $\int_a^b|2x-a-b|\,\mathrm{d}x\ (a<b)$;　　(2) $\int_0^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$;

3. (1) $\int_0^{\pi}x\sin^6 x\cos^4 x\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.

练习 3.9

(3.2.7 广义积分)

一、选择题

1. 下列反常积分中收敛的是(　　)

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$;　(B) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$;　(C) $\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;　(D) $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

2. 反常积分 $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x$ 收敛时, k 应满足(　　)

(A) $k>0$;　(B) $k\geqslant 0$;　(C) $k<0$;　(D) $k\leqslant 0$.

3. 下列广义积分收敛的是(　　)

(A) $\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;　(B) $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$;

(C) $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$;　(D) $\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x$.

二、填空题

1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2-x}}=$ ________;

2. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x=$ ________;

3. $\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$ ________.

三、计算解答

1. (1) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.　(2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})}(\alpha\geqslant 0)$.

(3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{x}=\int_{a}^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a;

3. 证明: $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

练习 3.10

(3.3.1—3.3.2 定积分的几何应用)

一、选择题

1. 由曲线 $ax = y^2$ 与曲线 $ay = x^2$ 所围成的面积是(　　).

(A) $\frac{a^2}{3}$;　　(B) $\frac{3}{a^2}$;　　(C) $\frac{a^3}{3}$;　　(D) $\frac{3}{a^3}$.

2. 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为(　　).

(A) $\frac{4}{3}$;　　(B) $\frac{4}{3}\pi$;　　(C) $\frac{2}{3}\pi^2$;　　(D) $\frac{2}{3}\pi$.

二、填空题

1. 曲线 $y = \ln x$ 与两直线 $y = (e + 1) - x$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形的面积为 ________;

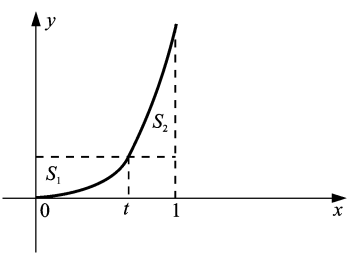
2. 星形线 $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ 的全长为 ________;

3. 心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的全长为 ________.

三、计算解答

1. 求由双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围成且在 $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 内的图形面积;

2. 求曲线 $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$ 所围成的平面图形的面积 S, 并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V;



第 3 小题图

3. 在闭区间[0, 1]上给定函数 $y = x^2$, 点 t 在什么位置时, 面积 S_1 和 S_2 之和分别具有最大值和最小值?

4. 求曲线 $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴以及 $y = 1$ 旋转所得到的旋转体体积.

练习 3.11

(3.3.3—3.3.4 定积分的物理应用)

一、选择题

1. 长度 $l = 10$ m 且密度按 $\delta = 6 + 0.3x$kg/m 而变化的一根轴，x 为距轴两端点中的一端的距离，则轴的质量为(　　)

(A)70；　　(B)75；　　(C)80；　　(D)85.

2. 若 1(kg) 的力能使弹簧伸长 1(cm)，则要使弹簧伸长 10(cm)，需要的功(kg · m)为(　　).

(A)0.05；　　(B)0.1；　　(C)0.5；　　(D)1.

二、填空题

1. 函数 $y = 2xe^{-x}$ 在[0, 2]上的平均值为 ________________；

2. 边长为 a 米的正方形薄片直立地沉浸在水中，它的一个顶点位于水平面，一对角与水面平行，则薄片一侧所受的压力为 ________________；

3. 一盛液体的容器，由曲边梯形 $a \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant x \leqslant \varphi(y)$ 绕 y 轴旋转而成，现容器内盛满比重为 r 的液体，为计算把液体全部抽出所要做的功，应取 ____________ 为积分变量，积分元素 $dw =$ ________________________，功 $w =$ ________________________.

三、计算解答

1. 设一锥形贮水池，深 15 米，口径 20 米，盛满水，今以唧筒将水吸尽，问要作多少功？

2. 一底为 8 厘米，高为 6 厘米的等腰三角形片，铅直地沉没在水中，顶在上底在下且与水面平行，而顶离水面 3 厘米，试求它每面所受的压力.

3. 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1 厘米，如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等，问第二次击锤后，铁钉又击入多少？

练习 4.1

（4.1 常数项级数与正项级数）

一、填空题

1. n 项部分和数列 $\{S_n\}$ 有界是正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的 ________ 条件；

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + a}{n}$ 收敛，则常数 a 的取值范围是 ______________.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{n!}$（$p$ 为任意常数）的值等于 ________________.

二、选择题

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1}$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ 收敛

2. 下列说法正确的是（　　）

(A) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $u_n \geqslant v_n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛；

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛；

(C) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$；

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.

3. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，下列结论正确的是（　　）

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(B) 若存在非零常数 λ，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = \lambda$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$；

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则存在非零常数 λ，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = \lambda$.

三、判定下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$；　　(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{(3^n - 2^n)(3^{n+1} - 2^{n+1})}$.

四、判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{na}{n+1}\right)^n (a > 0)$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$.

练习 4.2

（4.2 交错级数与任意项级数）

一、填空题

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 是 __________ 的（绝对收敛、条件收敛、发散）；

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 当 ________ 时是绝对收敛的，当 ________ 时是条件收敛的；

3. 设 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是 __________ 的（绝对收敛、条件收敛、发散）.

二、选择题

1. 下列级数发散的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

2. 常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$（　　）

(A) 发散；　　(B) 条件收敛；

(C) 绝对收敛；　　(D) 收敛性与 λ 有关.

3. 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是（　　）

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛；

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛；

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定；

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 的敛散性都不定.

三、判别下列级数的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{a}{n}\right)$（常数 $a>0$）；　　2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$.

四、讨论级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^2-3n+2)^x}$ 的绝对收敛和条件收敛性.

练习 4.3

(4.3 幂级数)

一、填空题

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域为 ________；

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 的收敛域为 ________；

3. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 3，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 __________.

二、选择题

1. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，下列结论中正确的是(　　)

(A) 若函数列 $\{u_n(x)\}$ 定义在区间 I 上，则区间 I 为此级数的收敛区间；

(B) 若 $S(x)$ 为此级数的和函数，则余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$；

(C) 若 $x_0\in I$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则 $|x|<|x_0|$ 所有 x 都使 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛；

(D) 若 $S(x)$ 为此级数的和函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 必收敛于 $S(x_0)$.

2. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径是(　).

(A) 5　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{5}$

3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x>0$ 时发散，在 $x=0$ 处收敛，则常数 $a=$(　　)

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2.

三、解答下列各题

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛域，并求其和函数.

2. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

3. 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n+1}{4^n(2n+1)}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

练习 4.4

（4.4 函数展开成幂级数）

一、填空题

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $s(x)=$ ________.

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 在 $x_0=0$ 处的幂级数为 $\frac{1}{1+x}=$ ________________.

3. 函数 $f(x)=\arctan x$ 展成 x 的幂级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n(x\in[-1,1])$，则 $a_n=$ __________.

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{2-x}$ 展开的 Maclaurin 级数为(　　)

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$;　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$;　(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$;　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^n}$.

2. $f(x)=\sin 2x$ 展开成 Maclaurin 级数为(　　)

(A) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n}$.

3. 函数 $f(x)=\ln(2x^2+x-3)$ 展开成 $(x-3)$ 的幂函数为(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n(x-3)^n$;

(B) $\ln 18+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{9}\right)^n(x-3)^n$;

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right](x-3)^n$;

(D) $\ln 18+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left[\left(\frac{2}{9}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right](x-3)^n$.

三、将 $f(x)=\frac{x}{2-x-x^2}$ 在 $x_0=0$ 处展开成幂级数，并求其收敛域.

四、将 $f(x)=\cos x$ 展开成 $x+\frac{\pi}{3}$ 的幂级数.

练习 4.5

（4.5Fourier 级数）

一、填空题

1. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的周期函数，且在 $(-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x, & -\pi<x<0,\\ x-\pi, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 以 2π 为周期的 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上的和函数为 $S(x)=$ ____________.

2. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且其傅里叶系数为 a_n，b_n，试求 $f(x+h)$（h 为实数）的傅里叶系数 $a_n'=$ ______，$b_n'=$ ______.

二、判断题

1. 三角函数的正交性是指在三角函数系中任意两个不同函数的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上积分值为 0.（　　）

2. 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续的函数 $f(x)$ 之 Fourier 级数在 $[-\pi, \pi]$ 上收敛于 $f(x)$.（　　）

3. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足 Dirichlet 条件，且在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=0, \pi, -\pi$ 上必收敛于 0.（　　）

三、将下面周期为 2π 的函数展开成 Fourier 级数：

$$f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x\leqslant \pi,\\ 0, & x=0,\\ \pi+x, & -\pi\leqslant x<0;\end{cases}$$

并计算 $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$.

四、(1) 将 $[-\pi, \pi)$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开成傅里叶级数，并证明 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}du$ 的值.

练习 4.6

（4.6 函数展开成正弦级数与余弦级数）

一、填空题

1. 若 $f(x+2\pi)=f(x)$，设 $f(x)=1-\dfrac{x}{\pi}(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 的余弦级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(-3)=$ ________，$S(12)=$ ________.

2. 函数 $f(x)=x-1(0\leqslant x\leqslant 2)$ 的周期为 4 的余弦级数的系数 $a_3=$ ______.

3. 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant \pi)$，则 $a_2=$ ______.

二、选择题

设函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$，令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $s\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$（　　）

(A) $\dfrac{3}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $-\dfrac{1}{4}2$　　(D) $-\dfrac{3}{4}$

三、将下列函数按要求展开.

1. 将函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\end{cases}$ 展开成余弦级数.

2. 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开为正弦级数.

3. 将 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}(-\pi\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成周期为 2π 的傅里叶级数.