

二维码 1-1 函数概念的历史发展

众所周知,函数是数学中一个重要概念,它几乎渗透到每一个数学分支,因此考察函数概念的发展历史及其演变过程,无疑有助于我们更深刻、更全面地理解函数的本质,并且从中得到有益的方法论启示.

1 函数概念的产生阶段—变量说

马克思曾认为,函数概念源于代数中自罗马时代就已经开始的不定方程的研究,那时,伟大的数学家丢番图对不定方程的研究已有相当程度,据此,可以认为函数概念至少在那时已经萌芽.实际上变量和函数的朴素概念,几乎和数学源于同一时期,因为数学家在研究物体的大小及位置关系时,自然会发现通常称为函数关系的那种从属关系.但是,真正导致函数概念得以迅速发展则是在16世纪以后,特别是微积分的建立,伴随这微积分的产生、发展和完善,函数概念也经历了产生、发展和完善的演变过程.

哥白尼的天文学革命以后,运动成为文艺复兴时期科学家共同感兴趣的问题,到了16世纪,对于运动的研究已变成自然科学的中心问题.在这一时期,函数概念在不同科学家那里有着不同形式的描述.在伽利略的《两门新科学》一书中,几乎从头到尾包含着函数的思想,他用文字和比例的语

言表述函数关系. 例如, 他提出: “两个等体积圆柱体的面积之比, 等于它们高度之比的平方根.” “两个侧面积相等的正圆柱, 其体积之比等于它们高度之比的反比.” 他又说: “从静止状态开始以定常加速度下降的物体, 其经过的距离与所用时间的平方成正比.” 这些描述非常清楚地表明伽利略已涉及并讨论变量和函数, 但他并没有做出一般的抽象, 并且也没有把文字叙述表示为符号形式.

几乎与此同时, 许多数学家, 如托里拆利、瓦里斯、笛卡儿、牛顿、莱布尼兹等, 从不同角度对函数进行了不同程度的研究. 有的数学家是把一些具体的函数看成曲线进行研究, 尽管当时还没有建立实连续的概念, 但数学家却默认曲线都是连续的. 托里拆利就曾对曲线 $y = ae^{ex} (x \geq 0)$ 进行过研究; 而瓦里斯在他的《动学》中研究过正弦曲线, 并注意到了这一函数的周期性. 麦尔先纳研究了旋轮线等等, 总的来讲, 当时关于对数曲线和指数曲线的研究比较普遍. 在解析几何产生前后, 人们除了已认识的代数曲线外, 还确定了相当多的超越曲线. 笛卡儿在其著作中提到了几何曲线与机械曲线的区别并由此引出代数曲线(函数)和超越曲线(函数)的区别.

到了 17 世纪, 牛顿在创立微积分的过程中一直用“流量”一词来表示变量之间的依赖关系, 并且从运动的角度, 把曲线看成是动点的轨迹. 他在《求曲边形的面积》中说: “我认为这里的数学量, 不是由小块合成的, 而是由连续运动描出的, 线(曲线)是描画出来的, 因而它的产生不是由于凑零为整, 而是由于点的连续运动……”

格雷果里在他的论文《论圆和双曲线的求积》中, 给出函

数这一模式的素朴描述,他定义函数是从一些其它的量经过一系列代数运算而得到的量,或者是经过任何其它可以想象到的运算而得到的.据他自己解释,这里的“可以想象到的运算,除了加、减、乘、除和开方外,还有极限运算.格雷果里给出的是函数的解析定义,由于此后不久就证明这一定义太狭窄,也就逐渐被人们遗忘.

“函数”作为数学术语是由微积分的另一位创立者莱布尼兹于1673年引进的,他用“函数”一词表示任一个随着曲线上的点变动的量,并指出:“象曲线上点的横坐标、纵坐标、切线的长度、垂线的长度等,所有与曲线上的点有关的量称为函数.”除此以外,他还引进了“常量”、“变量”和“参变量”等概念,一直沿用到现在,这个定义仅是在几何范围内揭示某些量之间所存在的依赖关系,并没给出函数的解析定义,因此,莱布尼兹所给出的函数的定义可看成是“函数概念的几何起源”.

总之,到了17世纪末,人们还没有从普遍意义上对函数这一概念的本质认识清楚.

2 函数概念的发展阶段一对应说

众所周知,微积分是一门研究变量和函数的学科.尽管牛顿和莱布尼兹创立了微积分,但由于他们对包括函数在内的一些基本概念,特别是对微积分赖以建立的基础——无穷小量的认识含混不清,出现了运算过程中的逻辑矛盾,导致了数学发展史上所谓的第二次数学危机.从而促使了数学家进一步寻找微积分可靠的基础,在这艰苦的探索过程中,函数自然也就会成为数学家必须研究的对象.

第一个在莱布尼兹工作的基础上作出函数概念推广的是约翰·贝努里，他指出：在这里，一个变量的函数是指由这个变量和常数以任意一种方式构成的量。在符号方面，约翰·贝努里利用 x 或 x 表示一般的 x 的函数，但到了 1718 年，他又改为中 x 。约翰·贝努里在函数概念中所说的任意的的方式，包括代数式子和超越式子。

数学家欧拉首先以函数的概念表示以及研究函数的无限过程建立一个与几何学和代数学相独立存在的分支——分析学，在《无穷小分析引论》（以下简称《引论》）中，函数概念起着重要而又明确的作用，欧拉是把函数而不是把曲线作为主要研究对象的，第一个把对数作为指数、把三角函数作为数值之比而不是作为一些线段进行系统论述的，并且指出了显函数与隐函数、单值函数与多值函数、一元函数与多元函数之间的区别，引进了目前使用的函数符号 $f(x)$ 。欧拉把约翰·贝努里给出的函数的定义称为解析函数，并进一步把它区分为代数函数和超越函数，同时指出前者只有自变量间的代数运算，后者指三角函数、对数函数、指数函数以及变量的无理数幂所表示的函数。在《引论》中，欧拉把指数函数和对数函数分别定义为：

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n, \quad \log x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

他还详细地讨论了指数函数、对数函数以及三角函数的展开式，并搞清了三角函数的周期性，引入了三角函数符号和弧度角。除了上述所讨论的各种函数外，欧拉还考虑了“表示任意地画出的曲线的函数”，并称之为“随意函数”，众所周知，连续函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线与 y 轴平行的两直线

及 x 轴所围成图形的面积 $S(x)$, 可用 $f(x)$ 定积分 $\int_a^x f(t) dt$ 来表示, 但 $S(x)$ 却未必只由 x 和常数 C 经过算术、三角、对数和指数运算而得到的函数来表示. 从而函数概念由微积分得到进一步扩展. 不难看出, 欧拉给出的函数的定义比约翰·贝努里的定义更普遍、更具有广泛意义. 欧拉给出的定义是一个变量的函数是由这个变量和一些数即常数以任何方式组成的解析表达式.

除此之外, 欧拉还规定一个给定的函数在它的整个“定义域”内是由同样一个“解析表达式”来描述的, 这种观点在数学家拉格朗日的著作中也有所体现, 如在他的名著《解析函数论》中, 他把函数定义为在其中可以按任何形式出现并对计算有用的表达式. 他在《函数计算教程》中说: “函数代表着要得到未知量的值而对已知量要完成的那些不同运算, 未知量的值本质上只是计算的最终结果. 也就是说, 函数是运算的一个组合.” 尽管后来由于欧拉、达朗贝尔和丹尼尔·贝努里在偏微分方程的研究中发现: 整条曲线并不能用一个方程来表示, 这迫使数学家修正函数的概念, 但到了 18 世纪, 甚至 19 世纪初, 函数由一个解析式给出的观点仍然占统治地位, 并认为连续曲线给出的连续函数一定能由一个解析表达式表示, 由不连续的曲线或折线所表示的函数不可能由一个解析式表示.

由于受到多项式函数的影响, 即若对于 $n+1$ 个 x 的值多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 与 $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 都相等, 则这两个多项式相等. 人们普遍认为, 对区间 $[a, b]$ 上的一切值, 恒有相同函数值的两个函数是完全

相同的,而对 $[a, b]$ 以外的 x 值,这两个函数的值也相等.

与此类似,由于受到三角函数特性的影响,许多数学家认为,只有周期性的曲线才能用周期函数来表示.在这一时期,既没有得到任何广泛采用的定义,也没有解决什么样的函数可用三角级数来表示,所有这些表明,函数的概念还有待于继续发展.

1800年前后,数学家开始关心分析的严密化问题,函数概念自然也成为严密化的对象.具体地表现在两个方面:一方面对原来有关函数的错误看法和片面的观点进行澄清纠正;另一方面继续探讨函数概念的本质,建立含义更广泛的函数概念.第一个冲破用解析式给出函数的观点是拉克鲁瓦,他在1797年给出的函数的定义是:每一个量,如果它依赖一个或几个别的量,不管人们知道不知道用何种必要的运算可以得到前者,就称前者为这个或这些量的函数.拉克鲁瓦还以五次方程的根是系数的函数为例给出相应的说明,这无疑对函数的概念又作出一次扩展.

在这一时期,傅里叶对函数概念的发展做出了巨大的贡献,尽管他也支持用解析式给出函数的观点,但他更深刻地揭示了函数的本质,他在1807年发表的题为《热的分析理论》的论文中,证明了“由不连续的曲线给出的函数,能用一个三角函数式来表示”.通过实例分析,傅里叶指出不连续函数可用一个式子,或者可用多个式子来表示,这就否定了“不连续函数不可能用一个解析式来表示”的观点.

傅里叶通过实例指出“在某一区间上恒有相同函数值的两个函数是完全相同的”这一观点的错误.根据傅里叶的研究,不仅周期函数,而且任意连续函数 $f(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$

的范围内都可用正弦函数、余弦函数这样的周期函数来表示,甚至不能用解析式给出的函数都可用三角级数来表示,这个观点非常重要,它动摇了 18 世纪关于分段连续函数的观念.

柯西于 1823 年分别给出了变量和函数的定义,指出“人们把依次取许多互不相同的值的量叫做变量.”“当变量之网这样联系起来的时候,即给定了这些变量中的一个值,就可以决定所有其它变量的值的时候,人们通常想象这些量是用其中的一个来表示的,这时这个量就取名为自变量,而由这自变量表示的其它的量就叫做这个自变量的函数.”按照此定义,不管 y 是用一个式子还是用多个式子表示,只要对每个 x 的值,有完全确定的 y 值与它对应, y 就是 x 的函数. 柯西当时非常清楚无穷级数是规定函数的一种方法,但函数未必受到解析式的约束,不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示,这仍然是一个很大的限制.

突破这一限制的是杰出数学家狄利克雷,他给出函数数的定义是:

若对 x 的每一个值,有完全确定的 y 值与之对应,不管建立起的这种对应方式如何,都称 y 是 x 的函数.

由这个定义不难看出,狄利克雷是用对应的观点给出函数定义的,至于自变量之网的联结方式如何,即 y 是按照一种或多种规律依赖于 x ,或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算表示,这是无关紧要的. 并且他还构造一个以他自己名字命名的著名的狄利克雷函数.

上述对应的思想是数学开始由过去研究的“算”到以后研究“观念”性质和结构的转变的标志,具有重要的理论

意义.

随后的斯铎克斯、罗巴切夫斯基、黎曼等都分别给出了函数的定义. 例如, 黎曼于 1851 年给出这样一个定义:

我们假定 z 是一个变量, 它可以逐次取所有可能的实数值. 若对它的每个值都有未定量 w 的唯一的值与之对应, 则 w 称为 y 的函数.

黎曼指出, 这个定义完全没有规定在单个的函数值之间存在一种规律, 此时, 如果函数在某个区间已有定义, 它在该区间外的延拓方式是完全任意的, 人们所定义的量 w 对量 z 的依赖关系是任意给定的或是由量的某种运算所确定并没有什么差异.

总之, 从 18 世纪前后开始, 经过许多数学家的不断探索和研究函数概念有了长足的发展. 但至少到 19 世纪前半期, 关于函数概念的叙述仍是不一致的, 比如, 当时一些最好的教科书, 有的沿用 18 世纪函数解析式的定义, 有的利用近似黎曼的定义等等. 因此函数的概念仍需进一步完善.

3 函数概念的完善阶段——关系说

在分析严格化的过程中, 集合论的思想逐渐形成. 皮亚诺发展了《无穷悖论》标志他第一个朝着建立集合的明确理论的方向迈出积极步伐的人. 后来的康托尔对集合的概念、性质以及集合与集合之间的关系进行了一系列的系统研究, 从而建立起具有重大意义集合论基础, 康托尔认为, 所谓集合就是一些确定的不同的东西的总体, 这些东西人们能意识到, 并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体. 无疑, 集合的概念比人们以前研究的各类特殊的数集更具一般意

义,从而也就有着广泛的应有性. 尽管集合论的产生受到许多数学家的指贵和攻击,仍有许多数学家利用集合论解决了许多问题,建立了许多概念,函数概念也正是在集合概念的基础上得到最终完善.

戴德金于 1887 年给出了这样一个定义:

系统 S 上的一个映射蕴含了一种规则,按照这种规则, S 中的每一个确定的元素都对应着一个确定的对象,它称为 S 的映像,记作 $\Phi(S)$,我们可以说, $\Phi(S)$ 中对应于元素 S , $\Phi(S)$ 由映射中作用于 S 而产生或导出, S 经映射 Φ 变换成 $\Phi(S)$.

这里至于系统 s 的对象是什么,并无限制这是函数概念的一次极大扩充,最终给出完善的现代函数定义的是法国的布尔巴基学派,定义如下:

设 E 和 F 是两个集合,它们可以不同,也可以相同. E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系,如果对每一个 $x \in E$,都存在唯一的 $y \in F$,它满足与 x 的给定关系. 我们称这样的运算为函数,它以上述方式将与 x 有给定关系的元素 $y \in F$ 与每一个元素 $x \in E$ 相联系,我们称 y 是函数在元素 x 处的值,函数由给定的关系所确定,两个等价的函数关系确定同一个函数. 现代数学分支中的函数定义大都是根据这一定义简化而成的. 就这样,函数概念从变量说发展到对应说,又从对应说进一步完善到现在的关系说,这就是函数概念的整个历史发展过程.

通过对函数概念的历史发展的了解,可以让同学们对函数概念了解更加全面,也可以激起同学们对函数学习的兴趣.