二维码 1－2　斐波那契数列与数列极限

在《算经》中，斐波那契提出一个有趣的问题：假定有一雄一雌一对刚出生的小兔，一个月后它们就能长大成大兔，并开始交配，在第二月结束时，雌兔子产下另一对兔子，过了一个月后它们也开始繁殖，如此这般持续下去. 每只雌兔在开始繁殖时每月都产下一对兔子，假定没有兔子死亡，问一对刚出生的小兔，一年内能繁殖成多少对兔子?

一月底，最初的一对兔子刚开始交配，所以只有 1 对兔子；二月底，雌兔产下一对兔子，共 2 对；三月底，最老的雌兔产下第 2 对兔子，共 3 对；四月底，最老的雌兔产下第 3 对兔子，两个月前生的雌兔产下一对兔子，共 5 对，…，如此这般计算，兔子对数分别是：1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233. 这就是著名的斐波那契数列，数列中的每一项，称为“斐波那契数”. 第十三位的斐波那契数，即为一对刚出生的小兔一年内所能繁殖成的兔子的对数，即 233. 从斐波那契数的构造明显看出：斐波那契数列从第 3 项开始，每项都等于前面两项之和.

此数列有下述递推公式：

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ n>2.$$

用数学归纳法，可推得斐波那契数列的通项公式：

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

斐波那契数列前一项与后面一项的比的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$$

这个数正是有名的黄金分割数.