

二维码 1-3 极限的发展简介

极限的朴素思想和应用可追溯到古代,我国古代哲学名著《庄子》记载着庄子的朋友惠施的一句话:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”其含义是:长为一尺的木棒,第一天截取它的一半,第二天截取剩下的一半,这样的过程无穷无尽地进行下去.随着天数的增多,所剩下的木棒越来越短,截取量也越来越小,无限地接近于 0,但永远不会等于 0.

中国早在 2000 年前就已能算出方形、圆形、圆柱等几何图形的面积和体积,3 世纪刘徽创立的割圆术,就是用园内接正多边形的极限时圆面积这一思想来近似计算圆周率 π 的,并指出“割之弥细,所失弥少,割之又割,以至不可割,则与圆合体而无所失矣”,这就是早期的极限思想.

到 17 世纪,由于科学与技术上的要求促使数学家们研究运动与变化,包括量的变化与形的变换,还产生了函数概念和无穷小分析即现在的微积分,使数学从此进入了一个研究变量的新时代.到 17 世纪后半叶,牛顿和莱布尼茨在前人研究的基础上,分别从物理与几何的不同思想基础、不同研究方向,分别独立地建立了微积分学.他们建立微积分的出发点使直观的无穷小量,极限概念被明确提出,但含糊不清.牛顿时发明微积分的时候,合理地设想: Δt 越小,这个平均速度应当越接近物体在时刻 t 时的瞬时速度.这一新的

数学方法，受到数学家和物理学家欢迎，并充分地运用它解决了大量过去无法问津的科技问题，因此，整个18世纪可以说是微积分的世纪。但由于它逻辑上的不完备也招来了哲学上的非难甚至嘲讽与攻击，贝克莱主教曾猛烈地攻击牛顿的微分概念。实事求是地讲，把瞬时速度说成是无穷小时间内所走的无穷小的距离之比，即“时间微分”与“距离微分”之比，是牛顿一个含糊不清的表述。其实，牛顿也曾在著作中明确指出过：所谓“最终的比”不是“最终的量”的比，而是比所趋近的极限。但他既没有清除另一些模糊不清的陈述，又没有严格界定极限的含义。包括莱布尼茨对微积分的最初发现，也没有明确极限的意思。因而，牛顿及其后一百年间的数学家，都不能有力地还击贝克莱的这种攻击，这就是数学史上所谓第二次数学危机。

经过近一个世纪的尝试与酝酿，数学家们在严格化基础上重建微积分的努力到19世纪初开始获得成效。由于法国数学家柯西、德国数学家魏尔斯特拉斯等人的工作，以及实数理论的建立，才使极限理论建立在严密的理论基础之上。至此极限理论才真正建立起来，微积分这门学科才得以严密化。因而真正现代意义上的极限定义，一般认为是由魏尔斯特拉斯给出的，他当时是一位中学数学教师。所谓“定义”极限，本质上就是给“无限接近”提供一个合乎逻辑的判定方法，和一个规范的描述格式。这样，我们的各种说法，诸如“我们可以根据需要写出根号2的任一接近程度的近似值”，就有了建立在坚实的逻辑基础之上的意义。