

二维码 1-4 无穷小的发展和认识

无穷小是一个历史概念，它的历史可以追溯到文艺复兴时期的不可分量，不可分量概念的产生可以从古希腊的原子论和阿基米德解决一些问题的方法中得到某种根源性的解释。而在公元前 450 年，希腊人芝诺用“两分法”分析物体的运动时，得出运动是不可能的悖论。他说：“若物体由 A 点运动到 B 点，首先必须经过 AB 的中点 C ；然而，要经过 C 点，又必须经过 AC 的中点 D ，即 AB 的 $1/4$ 分点……。”这些分点如此无限次地找下去所得结论是：运动是不可能的。这说明当时的希腊人虽然已经具备了用无穷小思想认识问题的能力，但由于他们还不能解决无穷小与很小很小之间的矛盾，所以当时的希腊几何证明中很少使用无穷小思想。

不管是在古希腊还是在中国，无穷小思想最初都是在哲学范围内提出的。在 2000 多年前的中国，人们就已产生对数学无穷小的萌芽认识。《庄子·天下篇》中有言“至大无外，谓之大一，至小无内，谓之小一”，大到没有外面，自然是无穷大，小到没有里面，当是无穷小。又言“一尺之锤，日取其半，万世不竭”，描述了无穷小的变化过程。

魏晋时期数学家刘徽在《九章算术》“刘徽的割圆术”中提出“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周全体而无所失矣”的思想，第一次创造性地将无穷小思

想运用到数学中，他用增加圆内接正多边形的边数来逼近圆。此时，正多边形的周长与圆的周长之差是无穷小。

17世纪上半叶一系列先驱性的工作，沿着不同的方向向微积分的大门逼近。意大利数学家卡瓦利列在其《不可分量几何》中，将面和立体看、成不可分量“流动”所生成。他认为，不可分量就是无穷小。在开普勒以后，不可分量逐渐被叫做无穷小量。随着社会不断进步，面临解决诸如瞬时速度，曲线的切线及不规则图形的面积计算等问题，都与无穷小相关，于是无穷小量方法就成为力学和几何学的一个重要工具。

在17世纪晚期，开始产生并形成了无穷小的演算。英国物理学家牛顿在研究物理学时，用变量 X 和 Y 的无穷小改变量作为求导数的手段。当他在求瞬时速度时，用位移的改变量 ΔS 与时间的改变量 ΔT 的比 $\Delta S/\Delta T$ ，当时间变化量 ΔT 变成零时的值表示。改变量 ΔT 是否为零？能不能取为零值？在当时引起了很大的争论。同时，德国数学家莱布尼兹也在几何学研究方面用变量 X 和 Y 的无穷小的微分增量 dy 和 dx 来研究面积和体积的计算。这时无穷小才开始被广泛地讨论和研究。