

二维码 1-5 椅子问题

长方形椅子能否在不平的地面上放稳吗?

【问题提出】

日常生活中有这样的现象:把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只需稍微挪动几次,一般都可以使四只脚同时着地.试从数学的角度加以解释.

【模型假设】

为了明确问题,对上述现象中的有关因素在符合日常生活的前提下,作出如下假设:

(1)椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处视为一点,四脚的连线呈长方形.

(2)地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即从数学的角度看,地面是连续曲面.这个假设相当于给出了椅子能放稳的必要条件.

(3)椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.为保证这一点,要求对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的.因为在地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内,如果出现深沟或凸峰(即使是连续变化的),此时三只脚是无法同时着地的.

【建立模型】

在上述假设下,解决问题的关键在于选择合适的变量,

把椅子四只脚同时着地表示出来.

首先,引入合适的变量来表示椅子位置的挪动.生活经验告诉我们,要把椅子通过挪动放稳,通常有拖动或转动椅子两种办法,也就是数学上所说的平移与旋转变换.然而,平移椅子后问题的条件没有发生本质变化,所以用平移的办法是不能解决问题的.于是可尝试将椅子就地旋转,并试图在旋转过程中找到一种椅子能放稳的情形.

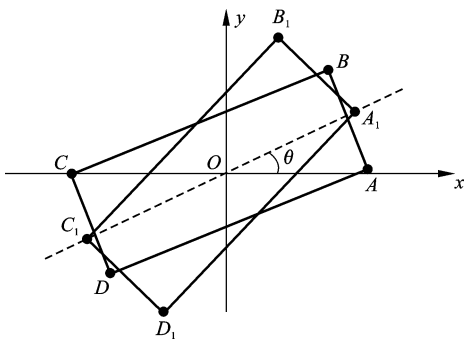
注意到椅脚连线呈长方形,长方形是中心对称图形,绕它的对称中心旋转 180° 后,椅子仍在原地.把长方形绕它的对称中心 O 旋转,这可以表示椅子位置的改变.于是,旋转角度 θ 这一变量就表示了椅子的位置.为此,在平面上建立直角坐标系来解决问题.

如下图所示,设椅脚连线为长方形 $ABCD$,以对角线 AC 所在的直线为 x 轴,对称中心 O 为原点,建立平面直角坐标系.椅子绕 O 点沿逆时针方向旋转角度 θ 后,长方形 $ABCD$ 转至 $A_1B_1C_1D_1$ 的位置,这样就可以用旋转角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ 表示出椅子绕点 O 旋转 θ 后的位置.

其次,把椅脚是否着地用数学形式表示出来.

我们知道,当椅脚与地面的竖直距离为零时,椅脚就着地了,而当这个距离大于零时,椅脚不着地.由于椅子在不同的位置是 θ 的函数,因此,椅脚与地面的竖直距离也是 θ 的函数.

由于椅子有四只脚,因而椅脚与地面的竖直距离有四个,它们都是 θ 的函数.而由假设(3)可知,椅子在任何位置至少有三只脚同时着地,即这四个函数对于任意的 θ ,其函数值至少有三个同时为 0. 因此,只需引入两个距离函数即可.考虑到



长方形 $ABCD$ 是中心对称图形, 绕其对称中心 O 沿逆时针方向旋转 180° 后, 长方形位置不变, 但 A, C 和 B, D 对换了. 因此, 记

A, B 两脚与地面竖直距离之和为 $f(\theta)$, C, D 两脚与地面竖直距离之和为 $g(\theta)$, 其中 $\theta \in [0, \pi]$, 从而将原问题数学化.

数学模型: 已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数, 对任意 θ , $f(\theta) - g(\theta) = 0$, 证明: 存在 $\theta_0 \in [0, \pi]$, 使得 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$ 成立.

【求解模型】

如果 $f(0) = g(0) = 0$, 那么结论成立.

如果 $f(0)$ 与 $g(0)$ 不同时为零, 不妨设 $f(0) > 0, g(0) = 0$. 这时, 将长方形 $ABCD$ 绕点 O 逆时针旋转角度 π 后, 点 A, B 分别与 C, D 互换, 但长方形 $ABCD$ 在地面上所处的位置不变, 由此可知, $f(\pi) = g(0), g(\pi) = f(0)$. 而由 $f(0) > 0, g(0) = 0$, 得 $g(\pi) > 0, f(\pi) = 0$.

令 $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$, 由 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 的连续性知 $h(\theta)$ 也是连续函数.

又 $h(0) = f(0) - g(0) > 0$, $h(\pi) = f(\pi) - g(\pi) < 0$,
根据连续函数介值定理, 必存在 $\theta_0 \in (0, \pi)$ 使得 $h(\theta_0) = 0$, 即 $f(\theta_0) = g(\theta_0)$;

又因为 $f(\theta_0) \cdot g(\theta_0) = 0$, 所以 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$. 于是, 椅子的四只脚同时着地, 放稳了.

【评注】

用函数的观点来解决问题, 引入合适的函数是关键. 本模型的巧妙之处就在于用变量 θ 表示椅子的位置, 用 θ 的两个函数表示椅子四只脚与地面的竖直距离. 运用这个模型, 不但可以确信椅子能在不平的地面上放稳, 而且可以指导我们如何通过旋转将地面上放不稳的椅子放稳.