二维码 2－2　微分中值定理综合应用举例

1. 求微分中值定理成立的中值 ξ

例 1　验证函数 $f(x)=\sqrt{(8x-x^2)^3}$ 在区间若 $[0,8]$ 上满足 Rolle 定理的条件，并求出点 $\xi\in(0,8)$，使得 $f'(\xi)=0$.

解　显然，$f(x)$ 在区间 $[0,8]$ 上连续，在 $(0,8)$ 内可导，且 $f(0)=f(8)=0$，所以函数 $f(x)=\sqrt{(8x-x^2)^3}$ 在区间 $[0,8]$ 上满足 Rolle 定理的条件. 故一定存在 $\xi\in(0,8)$，使得 $f(\xi)=0$. 事实上，因 $f'(x)=3(4-x)\sqrt{8x-x^2}$，由 $f'(x)=3(4-x)\sqrt{8x-x^2}=0$ 得 $\xi=4\in(0,8)$，可使 $f'(\xi)=0$.

小结： 验证中值定理只须检查其条件是否满足，而求相应的中介值可按中值定理的结论予以求解得到.

2. 利用中值定理讨论导函数的零点问题

例 1　设 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$.

试证：方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一实根.

证　本题要证的结论是至少有一个 $\xi\in(0,1)$，使得

$$\left(a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_3}{3}x^3\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)'\Bigg|_{x=\xi}=0，于是$$

设 $f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，则 $f'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，

且 $f(0)=0$，$f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，故由 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一实根.

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$，证明：必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

证 因函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，故在区间 $[0,2]$ 上也连续，由闭区间上连续函数的最大最小值定理知，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有最大值 M，最小值 m，即

$$m\leqslant f(0),f(1),f(2)\leqslant M,$$

故 $m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leqslant M$，再由闭区间上连续函数的介值定理知，

存在 $\eta\in(0,2)$，使得 $f(\eta)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$，又 $f(3)=1$，显然 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上连续，在 $(\eta,3)$ 上可导，且 $f(\eta)=f(3)=1$，故有 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(\eta,3)\subset(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

小结： 方法和规律：(1) 从要证的结论 $\varphi(\xi)=0$ 出发，将 $\varphi(\xi)=0$ 变形为等价的等式 $F'(\xi)=0$，这时，用 Rolle 定

理，辅助函数就是 $F(x)$.

例 3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶导数，且 $f(1)=0$，又 $F(x)=x^3f(x)$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F'''(\xi)=0$.

证 此题属于 $f^{(n)}(\xi)=0\,(n\geqslant 2)$ 的形式，应证明 $f^{(n-1)}(x)$ 满足 Rolle 定理.

$F'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$，$F''(x)=6xf(x)+6x^2f'(x)+x^3f''(x)$，由题意 $F'(x)$，$F''(x)$ 均在 $[0,1]$ 上连续，可导，且 $F'(0)=0$，$F''(0)=0$，又因 $F(0)=0$，$F(1)=f(1)=0$，故存在 $\xi_1\in(0,1)$ 使 $F'(\xi_1)=0$，对 $F'(x)$.

在 $[0,\xi_1]$ 应用 Rolle 定理，知至少存在 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使 $F''(\xi_2)=0$，对 $F''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上应用 Rolle 定理，得至少存在一点 $\xi\in(0,\xi_2)$，使 $F'''(\xi)=0$，即至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'''(\xi)=0$.

小结： 证明结论为 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题，当 $n=0$，通常对 $f(x)$ 应用连续函数的零点定理，当 $n=1$，通常对 $f(x)$ 应用 Rolle 定理，当 $n=2$，通常对 $f'(x)$ 应用 Rolle 定理，当 $n>2$，反复对高阶导数应用 Rolle 定理或者验证 $f^{(n-1)}(x)$ 在 ξ 处取得极值利用费马定理.

3. 讨论“中值”满足某种关系的命题

例 1 若 $ab>0$，证明 $ae^b-be^a=(\xi-1)e^{\xi}(b-a)$，其中 ξ 在 a，b 之间

解 分析：$\dfrac{ae^b-be^a}{b-a}=(\xi-1)e^{\xi}\Rightarrow\dfrac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=(1-\xi)e^{\xi}$，

设 $0<a<b$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in[a,b]$.

显然，左边刚好是两函数的增量比，只须检查右边是否为这两个函数在中值 ξ 的导数比.

对 $f(x)$, $g(x)$ 应用 Cauchy 中值定理，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Rightarrow\frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{e^{\xi}\xi-e^{\xi}}{\xi^2}}{-\dfrac{1-}{\xi^2}}=(1-\xi)e^{\xi}$$

即 $$ae^b-be^a=(\xi-1)e^{\xi}(b-a).$$

小结: 将要证的结论 $\varphi(\xi)=0$ 中不含 ξ 项移到一边，凑成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 或 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}$ 的形式，然后用 Lagrange 中值定理或 Cauchy 中值定理.

例 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，试证存在 ξ, $\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$

解 此题包含两个不同的中值，通常需要两次使用中值定理，要证 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$. 即证 $\dfrac{f'(\eta)}{e^{\eta}}=\dfrac{b-a}{e^b-e^a}f'(\xi)$（使 ξ, η 分居两边）. 令 $g(x)=e^x$，由题设可知，$f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足柯西中值定理，于是存在 $\eta\in(a,b)$ 使

$$\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}\Rightarrow\frac{f'(\eta)}{e^{\eta}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{b-a}{e^b-e^a},\quad(1)$$

又 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足拉氏中值定理，于是存在 $\xi \in (a, b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$， (2)

由(1)，(2)及 $f'(x)\neq 0$ 可得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

例 3 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\dfrac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

证 要证 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$，即证 $f'(\xi)-\xi^2=f'(\eta)-\eta^2$，取 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{3}x^3$，显然 $F(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 和 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 上满足 Lagrange 中值定理的条件，所以存在 $\xi\in\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ 和 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 使得

$F\left(\dfrac{1}{2}\right)-F(0)=F'(\xi)\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$，$F(1)-F\left(\dfrac{1}{2}\right)=F'(\eta)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$.

以上两式相加得 $F(1)-F(0)=\dfrac{1}{2}[F'(\xi)+F'(\eta)]$，即 $0=\dfrac{1}{2}[f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2]$，也就是 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

例 4 已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：(1) 存在 $\alpha\in(0, 1)$，使得 $f(\alpha)=1-\alpha$；

(2) 存在两个不同的点 ξ，$\eta\in(0, 1)$，使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$.

证 (1)令 $F(x)=f(x)+x-1$，$F(0)=f(0)-1=-1<0$，$F(1)=f(1)=1>0$，又 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由零点定理知存在 $\alpha\in(0,1)$ 使 $F(\alpha)=0$，即 $f(\alpha)=1-\alpha$.

(2)因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，分别对 $f(x)$ 在 $[0,\alpha]$ 与 $[\alpha,1]$ 上两次使用 Lagrange 中值定理知，存在 $\xi\in(0,\alpha)\subset(0,1)$ 和 $\eta\in(\alpha,1)\subset(0,1)$ 使得

$$f(\alpha)-f(0)=f'(\xi)\alpha,\ f(1)-f(\alpha)=f'(\eta)(1-\alpha),$$

即 $f'(\xi)=\dfrac{1-\alpha}{\alpha}$，$f'(\eta)=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$，故 $f'(\eta)f'(\xi)=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1-\alpha}{\alpha}=1$.

小结： 证明含有两个中值 ξ，η，$(\xi\neq\eta)$ 的命题，通常把同一个表达式用不同的中值定理予以表达，得到不同中值关系式，或者是在两个不同区间上进行中值定理的表述而得到不同的中值关系式.