

二维码 3-2 极坐标系下求平面图形的面积

设曲线由极坐标方程 $r = r(\theta)$ 表示, 求由此曲线 $r = r(\theta)$ 及两射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围图形的面积(图 1), 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $r(\theta) \geq 0$.

用元素法, 在 $[\alpha, \beta]$ 中任取一个小角区间 $[\theta, \theta + d\theta]$. 与这个小区间 $d\theta$ 对应的那部分面积记为 dA (图中阴影部分). dA 近似地用半径 $r = r(\theta)$, 中心角为 $d\theta$ 的扇形面积代替, 即

$$dA = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

$$\text{从而有 } A = \int_{\alpha}^{\beta} dA = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta.$$

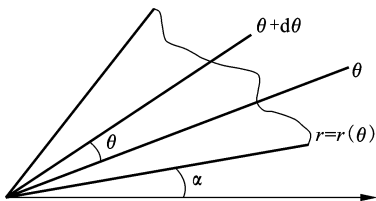


图 1

例 1: 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 所围成的面积.

解: 如图 2 所示, 此图形关于极轴对称, 用 A_1 表示极轴上方那部分面积(图中阴影部分), 则所求面积为

$$A = 2A_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos\theta)^2 d\theta = \frac{3}{2} \pi a^2$$

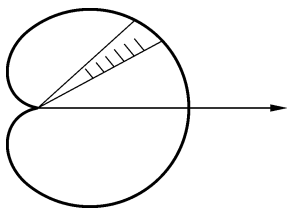


图 2