二维码 3－3
平行截面面积为已知的立体体积

设某立体夹在过点 $x=a$，$x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间($a<b$)(图 3)，又设过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$，$x\in[a, b]$，取 x 为积分变量，其变化区间为$[a, b]$，立体中相应于任一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$的薄片的体积，近似于 $A(x)\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}A=A(x)\mathrm{d}x$，所以整个立体体积为 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$.

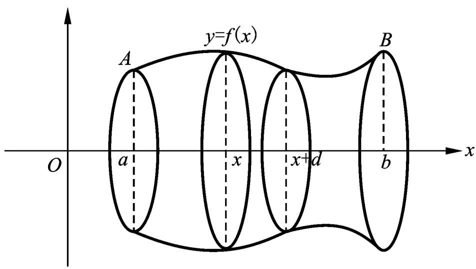

图 3

例 1： 求以半径 R 的圆为底，平行底面且等于底圆直径的线段为顶，高为 h 的正劈锥体的体积.

解：取底圆所在的平面为 xOy 平面，圆心 O 为原点，并使 x 轴与正劈锥体的顶平行，底圆的方程为 $x^2+y^2=R^2$，过 x 轴上的点 $x(-R\leqslant x\leqslant R)$作垂直于 x 轴的平面，截正劈锥体得等腰三角形的截面(图 4). 这截面的面积为 $A(x)=h\cdot y=h\sqrt{R^2-x^2}$，于是所求正劈锥体体积为 $V=\int_{-R}^{R}A(x)\mathrm{d}x=h\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi R^2 h}{2}$.

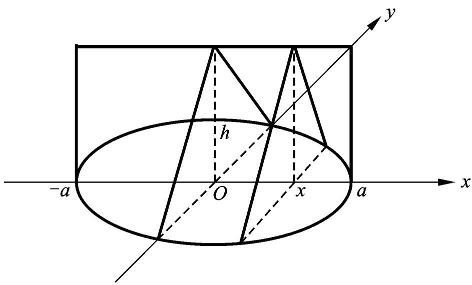

图 4