二维码 4－2　方向导数与梯度

1. 方向导数

在许多实际问题中，常常需要知道函数 $f(x, y)$ 在一点 $P(x_0, y_0)$（或 $f(x, y, z)$ 在一点 $P(x_0, y_0, z_0)$）沿任何方向或某个方向的变化率，例如预报某地的风向和风力就必须知道气压在该处沿各个方向的变化率，在数学上就是多元函数在一点沿给定方向的方向导数的问题.

我们知道，$f_x(x, y)$，$f_y(x, y)$ 分别是函数 $z=f(x, y)$ 沿平行于 x 轴与 y 轴方向变化时的变化率，现在我们讨论函数 $z=f(x, y)$ 沿着任一方向的变化率.

定义 1　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某邻域内有定义，从点 P 引一条射线 l，设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 是 l 上的另一点（见图 1），则 P，P' 两点间距离 $|PP'|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，考虑函数的增量 $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ 与 ρ 之比值 $\frac{\Delta z}{\rho}$，当 P' 沿着 l 趋近 P 时，即 $\rho\to 0$，若比值极限存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 沿着方向 l 的方向导数，记作：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\rho}$$

由定义可知，当函数在点 $P(x, y)$ 处的偏导数 $f'x$，$f'y$，

存在时，函数$f(x, y)$在点$P(x, y)$处沿着x轴正向的方向导数就是$f'x$，沿y轴正向的方向导数就是$f'y$，换句话说，f关于x和y的偏导数是方向导数的特例，关于方向导数的存在性及其计算，我们有下面的定理：

定理 1 如果函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$处可微，那么函数$f(x, y)$在该点沿任一方向l的方向导数存在且有$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$，其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$是$l$的方向余弦.

证： 从$P(x, y)$沿方向l上取另一点$P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$，因为$f(x, y)$在点$P(x, y)$可微，所以

$$f(P') - f(P) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\rho)$$

其中$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$\Delta x = \rho\cos\alpha$，$\Delta y = \rho\cos\beta$，于是有：

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0}\frac{f(P') - f(P)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0}\left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

注：方向导数的概念和计算容易推广到三元函数，如果三元函数$u = f(x, y, z)$在点$P(x, y, z)$处可微，则它在点$P(x, y, z)$沿射线l的方向导数存在且$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$，其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是$l$的方向余弦.

例 1 求函数$z = x^3y^2$在点$P(3, 1)$沿从点$P(3, 1)$到$Q(2, 3)$的方向的方向导数.

解： l 的方向向量为$\overrightarrow{PQ}=\{-1,2\}$且$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，而 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(3,1)}=3x^2y^2\Big|_{(3,1)}=27$，

$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(3,1)}=2x^3y\Big|_{(3,1)}=54$

故方向导数为：$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(3,1)}=27\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+54\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{81}{\sqrt{5}}$.

2. 梯度

方向导数概念描述了函数在一点沿某一方向变化率的大小，然而，从给定点出发有无穷多个方向，函数沿那个方向的变化率最大？最大变化率是多少？这就是要介绍的梯度的概念：

定义 2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处有连续偏导数，则在点 (x,y) 处可用偏导数作出一个二维向量 $\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$，称之为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的梯度，记作 ∇z 或 $\mathrm{grad}z$ 或 $\mathrm{grad}f$

即 $\mathrm{grad}z=\nabla z=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$，“$\nabla$”——nabla 算子，$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$（向量微分算子）

注：(1) 定义了梯度后，方向导数可表示为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial l}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot(\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j})\end{aligned}$$

$$=\mathrm{grad}f\cdot\vec{e}\qquad 其中(\vec{e}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j})$$

$$=\|\mathrm{grad}f\|\cdot\cos(\mathrm{grad}f,\vec{e})$$

当 $\cos(\vec{g},\vec{e})=1$ 时，方向导数$\frac{\partial f}{\partial l}$取最大值，其值为梯度的模 $\|g\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$

当 $\cos(\vec{g},\vec{e})=0$ 时，即梯度与 $\vec{e}$ 方向垂直时，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}=0$.

(2)类似地，可定义三元或三元以上函数，若 $u=f(x,y,z)$在 $P(x,y,z)$可微，则 f 在 P 点的梯度定义为：$grad\ u=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$，沿梯度方向的方向导数达到最大值，该最

大值就是梯度的模：

$$\|\mathrm{grad}u\|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

例 2 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求该函数在点(1，–1，2)处的最大变化率的方向及最大变化率.

解： 依方向导数和梯度的关系，最大的变化率的方向即梯度方向.

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$

$\therefore\ \mathrm{grad}f(1,-1,2)=2\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，最大值为 $\|g\|=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$