

二维码 6-2 高空坠物问题

现代城市高楼林立, 高空坠物事件经常发生. 你能根据坠物砸到地面的损坏情况或地面印迹等信息判断坠物掉落的高度吗?

解 分析影响自由落体运动的因素, 记物体质量为 m , t 时刻下落的高度为 $h(t)$.

假设不考虑空气阻力 f , 则根据 Newton 第二定律有

$$mg = ma$$

$$h''(t) = g$$

两次积分容易求出通解为

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

将初始条件 $h(0) = h'(0) = 0$ 代入即得

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

这就是熟知的自由落体运动方程. 据此根据坠物砸到地面的损坏情况或地面印迹等信息判断坠物掉落的高度方法, 通过信息估计物体落到地面时的动能、速度等即可估计坠物掉落的高度. 如何改进算法提高估计的精度?

假设空气阻力 f 与物体运动速度 v 成正比, 比例系数为 k . 根据 Newton 第二定律有

$$mg - f = ma$$

即 $mg - kh'(t) = mh''(t)$

亦即 $h''(t) + ch'(t) - g = 0$

其中, $c = \frac{k}{m}$. 设 $h(0) = h_0$, 则得到考虑空气阻力的落体运动的数学模型为

$$\begin{cases} h''(t) + ch'(t) - g = 0 \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$$

这是一二阶常系数微分方程初值问题.

假设空气阻力 f 与物体运动速度 v 的平方成正比, 比例系数为 k . 根据 Newton 第二定律有

$$mg - f = ma$$

即 $mg - k(h'(t))^2 = mh''(t)$

亦即 $h''(t) + c(h'(t))^2 - g = 0$

其中, $c = \frac{k}{m}$. 设 $h(0) = h_0$, 则得到考虑空气阻力的落体运动的数学模型为

$$\begin{cases} h''(t) + ch'(t) - g = 0 \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$$

这是一二阶常系数非线性微分方程初值问题.

假设空气阻力 f 与物体运动速度 v 的平方成正比, 且比例系数为 k 是 t 的函数, 则得到考虑空气阻力的落体运动的数学模型为

$$\begin{cases} h''(t) + c(t)(h'(t))^2 - g = 0 \\ h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$$

这是一二阶变系数非线性微分方程初值问题.