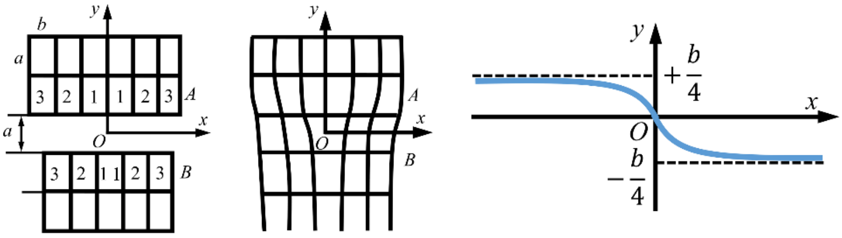

考虑简单立方结构中的刃型位错。先假设两块完整晶体如图所示，然后令A面上的原子沿x轴位移u(x)，B面同号原子做等量反向移动-u(x)，最后达到图b所示位置黏合起来。这时A、B面上同号原子的相对位移可以写成

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{x}) &= 2\mathrm{u}(\mathrm{x}) + \frac{b}{2} \quad (x > 0) \\ \varphi(\mathrm{x}) &= 2\mathrm{u}(\mathrm{x}) - \frac{b}{2} \quad (x > 0) \end{aligned} \tag{1}$$

由于离位错很远的地方，譬如晶体表面是完整的，所以边界条件可写成下式，如图所示。

$$\begin{aligned} \mathrm{x} =+ \infty, \varphi = 0, \mathrm{u}(\mathrm{x}) =- \frac{b}{4} \\ \mathrm{x} =- \infty, \varphi = 0, \mathrm{u}(\mathrm{x}) = \frac{b}{4} \end{aligned} \tag{2}$$

假定：A、B两面间相互作用的切应力τ_{xy}是以b为周期，相对位移φ的正弦函数，A面以上B面以下的晶体仍然按各向同性均匀连续弹性介质处理，即相当于在半无限大弹性介质的B面上有外加力τ_{xy}，另一半的A面上有外加力-τ_{xy}，应力应变满足胡克定律，不考虑纵向位移。

根据胡克定律找出u(x)与τ_{xy}的关系。由假设可知

$$\tau_{xy} =- \mathrm{C}\sin\left(\frac{2\pi\varphi}{b}\right) \tag{3}$$

由于φ很小，故

$$\begin{aligned} \tau_{xy} =- \frac{2\pi\varphi \mathrm{C}}{b} = \frac{G\varphi}{a} \Longrightarrow C = \frac{Gb}{2\pi a} \\ \tau_{xy} =- \frac{Gb}{2\pi a}\sin\left(\frac{2\pi\varphi}{b}\right) = \frac{Gb}{2\pi a}\sin\left(\frac{4\pi u}{b}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

把强度为b的单位位错看成沿滑移面连续分布的强度为无穷小的无穷多个弹性位错，将在dx一段滑移面内其强度写成b'(x)dx，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b'(x)dx = b \tag{5}$$

位于x'与x'+dx'间隔内强度为的位错在滑移面一点x上的切应力为

$$\tau_{xy} =- \frac{Gb'dx'}{2\pi(1-\nu)(x-x')} \tag{6}$$

整个位错的贡献即为对这些无穷小的弹性位错积分，得

$$\tau_{xy} =- \frac{G}{2\pi(1-\nu)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b'dx'}{(x-x')} \tag{7}$$

因为dφ=2du，相当于位于x'处的弹性位错的柏氏矢量b'dx'，所以

$$\tau_{xy} =- \frac{G}{2\pi(1-\nu)}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b'/dx'}{(x-x')}dx' \tag{8}$$

比较式（4）和（8），得到一个u(x)所满足的积分方程为

$$\frac{b(1-\nu)}{2a}\sin\left(\frac{4\pi u}{b}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b'/dx'}{(x-x')}dx' \tag{9}$$

此方程满足边界条件的解为

$$\tau_{xy} = \mathrm{u(x)} = -\frac{b}{2\pi} tan^{-1}(\frac{x}{\delta}) \tag{10}$$

式中，δ=a/2(1-ν)称为位错的半宽度。当x=±δ时，u(x)=±b/8为无穷远处u值的一半，故以δ来确定原子严重错排区域的范围。

点阵模型中位错的弹性能

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{r_1} \tau_{xy} b dx \tag{11}$$

将式（4）和（10）代入（11）得到

$$W = \frac{Gb^2}{4\pi a}\int_0^{r_1} \sin\left[2tan^{-1}(\frac{x}{\delta})\right]dx = \frac{Gb^2}{8\pi(1-\nu)} In\frac{r_1^2+\delta^2}{\delta^2}$$

$$W \approx \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)} In\frac{r_1}{\delta} \quad (r_1 \gg \delta) \tag{12}$$

现在要使位错在周期结构中运动时最小需要多大的力，这就是派纳力。首先从位错模型的对称性可知无应力时晶体中位错是不受任何来自晶格的作用力，一旦位错因滑移而稍许偏离上述位置后，它就会受到一个回复力作用，这个回复力与滑移面两边的原子的错排有关。下面讨论此错排与回复力的关系。

先求滑移面两边任意一对沿位错单位长度原子列间的错排能，考虑到对称性，只计算一边原子所分摊值，单位错排能为

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\delta} \tau_{xy} b d\delta \tag{13}$$

将（1）和（4）式代入式（13），即得

$$w_{AB} = -\frac{Gb^3}{8\pi^2 a}\int_{b/4}^{u} \sin\left(\frac{4\pi u}{b}\right) d\left(\frac{4\pi u}{b}\right) = \frac{Gb^3}{8\pi^2 a}\left[cos\left(\frac{4\pi u}{b}\right)+1\right] \tag{14}$$

为了便于求出滑移面上每一对原子列错排能的和，设滑移后的位错中心距最近对称位置的距离为αb，则滑移面两边所有原子列此时位置可写成

$$x = \left(\alpha + \frac{n}{2}\right)b,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{15}$$

这样总错排能

$$W_{AB} = \sum_n w_{AB} = \frac{Gb^3}{8\pi^2 a}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{cos2[tan^{-1}\left(\alpha + \frac{n}{2}\right)\frac{b}{\delta} + 1\} \tag{16}$$

根据傅里叶级数求得此和为

$$W_{AB} = \frac{Gb^2}{4\pi(1-\nu)}\left[2\exp\left(-\frac{4\pi\delta}{b}\right)cos4\pi\alpha + 1\right] \tag{17}$$

因为dx=bdα，所以来自晶格的作用力可由式（17）对x微分求得

$$f = -\frac{1}{b}\frac{\partial W_{AB}}{\partial \alpha} = \frac{2Gb}{1-\nu}\exp\left(-\frac{4\pi\delta}{b}\right)\sin4\pi\alpha \tag{18}$$

派纳力是克服最大晶格阻力所需的临界切应力，故当sin4πα=1时，得

$$\tau_{p-N}^0 = \frac{f}{b}\frac{2G}{1-\nu}\exp\left(-\frac{4\pi\delta}{b}\right) = \frac{2G}{1-\nu}\exp\left(-\frac{2\pi a}{b(1-\nu)}\right) \tag{19}$$

参考文献：张俊善 材料强度学