

习题 1.7

1. (1) 对, 因 $||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$;

(2) 错, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 则 $|f(x)|$ 在点 $x=0$ 连续, 但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 间断.

3. $x = -1, 0, 1, 2, 3$ 均为 $f(x)$ 的间断点. 除 $x=0$ 外都是可去间断点. 补充定义 $f(-1) = f(2) = f(3) = 0$, 修改定义使 $f(1) = 2$, 则它们都成了连续点.

4. (1) $x=1$ 为无穷间断点; (2) $x=0$ 为可去间断点; (3) 都连续;

(4) $x = -1$ 为第二类间断点, $x=0$ 为跳跃去间断点, $x=1$ 为可去间断点, $x=3, 5, 7, \dots$ 为第二类间断点.

5. (1) $x=1$ 为可去间断点, 重新定义 $f(1) = -2$, 则 $x=1$ 成为连续点, $x=2$ 为无穷间断点;

(2) $x=0$ 为第二类间断点;

(3) $x=0$ 为第一类间断点;

(4) $x=0$ 为可去间断点, 重新定义 $f(0) = 1$, 则 $x=0$ 成为连续点, $x=k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 为无穷间断点, $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{N}$ 为可去间断点, 重新定义 $f(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, 则 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{N}$ 成为连续点.

6. $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续.

7. (1) $a = -\frac{\pi}{2}$; (2) $a = 2, b = -\frac{3}{2}$.

9. $x=0$.

10. $x = -1, x=1$ 为跳跃间断点.

11. $a=0$.

12. $f(x) = \cot(\pi x) + \cot \frac{\pi}{x}$.

13. 连续区间: $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\frac{8}{5},$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$.

15. (1) 错, 例如 $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x, f(x) = e^x$; (2) 错, 例如 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in Q^c \end{cases}, \varphi^2(x) \equiv 1;$

(3) 对, 例如: $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \in Q^c \end{cases}, f(x) = |x| + 1, f(\varphi(x)) \equiv 2;$ (4) 对.

16. (1) $\sqrt{5}$; (2) 0; (3) 2; (4) $\cos x_0$; (5) 1; (6) 1.

17. (1) 5; (2) $\frac{\pi}{4}$; (3) $\frac{2}{3}$; (4) -2; (5) $e^{-\frac{1}{2}}$; (6) $\frac{3}{4}$.