习题2

1. (1)D；(2)B；(3)D；(4)B；(5)C；(6)D；(7)A；(8)A；9)D；(10)B；(11)D；(12)D；(13)D；(14)B.

2. (1)$2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$；(2)$\frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$；(3)$(n+1)!$；(4)$n!\ f^{n+1}(x)$；

(5)0；(6)同阶；(7)$\frac{5^x}{\ln 5}+C$；$\ln\sqrt{1+x^2}+C$；

(8)$\frac{1}{2}\sqrt{x\sqrt{\sin x\sqrt{e^x-1}}}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cot x+\frac{e^x}{4(e^x-1)}\right]$；(9)$(s-1)f'(0)$；

(10)$\frac{1}{3x}$；(11)1；(12)$dy=\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}\cdot\frac{y}{|x|}}{y+\sqrt{x^2-y^2}\cdot\frac{|x|}{x}}dx$；

(13)$y^{(n)}=-\frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n 2^n n!}{(2x+1)^{n+1}}\right]$；

(14)$y'''=-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$；(15)$[0,+\infty)$，$(-\infty,0)$；

(16)$x=0$ 时的极大值 0，$x=1$ 时取极小值 $-\frac{1}{2}$；(17)0，小. (18)$\frac{13}{12}$，1；

(19)$(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$，$(0,1)$；(20)-6，7，$(-1,-12)$.

3. $f'(0)=1$.

4. $g(a)$.

5. $y=ex$.

6. $a=-1$，$b=2$.

7. (1)$-\cos(\cos(\sin x))\sin(\sin x)\cos x$；(2)$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(3)$\frac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$；(4)$1+\frac{\pi}{4}$.

8. (1)$(2x+1)f'(x^2+x)$；(2)$f'(e^x)e^{x+f(x)}+f(e^x)e^{f(x)}f'(x)$.

9. $\frac{(a+x)(x+\sin x)^2}{1+\cos x}$.

10. (1)$\frac{(-1)^n n!}{7}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+6)^{n+1}}\right]$；(2)$(\sqrt{2})^n e^x\cos\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)$.

11. $2^{49}[(1225-2x^2)\sin 2x+100x\cos 2x]$.

12. $2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)+2(f'(x))^2+2f(x)f''(x)$；
$12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)+6f'(x)f''(x)+2f(x)f'''(x)$.

13. $2g(a)$.

14. $2x-\frac{1}{x}$，$2+\frac{1}{x^2}$，$\frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+1}}$ $(n\geqslant 2)$.

15. (1)$\frac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$或$\frac{e^{2y}(2-xe^y)}{(1-xe^y)^3}$；(2)$\frac{y(1+\ln y)^2-x(1+\ln x)^2}{xy(1+\ln y)^3}$；(3)$\frac{1}{6}(\sqrt{3}-\pi)$.

16. $x^{\cos x}\sin x[-\sin x\ln x+\dfrac{\cos x}{x}+\cot x]$.

17. $\dfrac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}$.

18. $x+y-5=0$.

19. $\mathrm{d}y=\dfrac{x+y}{x-y}\mathrm{d}x$.

20. $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$.

21. $\left[\varphi'(x)+\dfrac{2y}{1+\mathrm{e}^y}\right]f'[\varphi(x)+y^2]$；

$$\left[\varphi'(x)+\frac{2y}{1+\mathrm{e}^x}\right]^2 f''[\varphi(x)+y^2]+\left[\varphi''(x)+\frac{2}{1+\mathrm{e}^y}-\frac{2y\mathrm{e}^y}{(1-\mathrm{e}^y)^3}\right]f'[\varphi(x)+y^2].$$

22. 2π.

23. 提示：$F(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ x^2, & 1<x<2\end{cases}$，$F'(x)=\begin{cases}2x, & 1<x<2\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$ 且 $F(x)$在 $x=1$ 处不可导.

24. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1}{f''(t)}$.

25. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|\, x_0=\dfrac{3\pi}{4}$.

26. 提示：用定义求$f'(x)=\varphi(x)=\cos x+x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

27. $a=1$，$b=e$，$f'(x)=\begin{cases}2x, & x<0\\ \dfrac{2x}{\mathrm{e}+x^2}, & x\geqslant 0\end{cases}$.

28. $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$f''(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$，$\therefore (1-x^2)f''(x)=xf'(x)$，两边求 n 阶导数后，整理得：

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0,\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),$$

令 $x=0$，则$f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$得$f^{(2n+1)}(0)=[(2n-1)!!]^2$，$f^{(2n)}(0)=0$.

29. $f'(x)=12x^2-10x+1=0$ 有根：$x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}\in(0,1)$.

30. 取 $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x$，在$[0,x_0]$上利用 Rolle 定理.

31. 取 $F(x)=\ln x$，$f(x)$，$F(x)$在$[a,b]$上利用 Cauchy 中值定理.

32. 取 $F(x)=\arctan x$ 在 a 与 b 间利用 Lagrange 中值定理.

33. 设 $F(x)=(x-a)^2f(x)$在$[a,b]$上用 Rolle 定理，得 $F'(\xi_1)=0$，以 $F'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)^2f(x)-0}{x-a}=0$，$F'(x)$在$[a,\xi_1]$上再用 Rolle 定理便得结论.

34. 取 $F(x)=x^3-x^2+x+1$ 在$[-1,0]$上用介值定理.

35. (1)2；(2)$\dfrac{1}{3}$；(3)$\sqrt{6}$；(4)1；(5)$\dfrac{1}{6}$；(6)$-\dfrac{e}{2}$.

36. $a=6$，$b=-4$ 或 $a=-4$，$b=16$.

37. 连续.

38. $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$.

39. 当 $x=\frac{3}{4}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，取极大值，$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}$；$x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取极小值，$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}$.

40. 略

41. $a=2(1-\ln2)$时，方程有一个实根，$a>2(1-\ln2)$时方程有两个实根.

42. $a=-3$，$b=0$，$c=5$.

43. $h=\frac{4}{3}R$, $v=\frac{32}{81}\pi R^3$.

44. 当柱面高与底面半径之比为 2∶3 时造价最低.

45. 设 $F(x)=g(b)f(x)+g(x)f(a)-f(x)g(x)$利用 Rolle 定理.

46. 令$\frac{m-n+1}{m+1}$得 $3f\left(\frac{1}{t}\right)-f(t)=t$，联立原方程得$f(x)=\frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{x}\right)$，$f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$为极大值，$f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$为极小值.

47. 令 $F(x)=\arctan\sqrt{x^2-1}+\arcsin\frac{1}{x}$，$F'(x)=0$，故 $F(x)=C$，取 $x=1$ 得 $C=\frac{\pi}{2}$.

48. 求一阶导数，利用单调性.

49. (1)$\frac{1}{6}$；(2)$-\frac{1}{12}$.