习题 4.4

1. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}$, $(-3<x<3)$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{2n}$ $\quad(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$

2. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln a)^n x^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$, $x\in(-|a|,|a|)$; (4) $\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n$, $x\in(-a,a]$;

(5) $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}2^n-1}{n}\right)x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$;

(8) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n+1}{3}x^n$, $x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

(9) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, $x\in(-1,1)$

3. (1) $(x-1)^2+4(x-1)+4$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e(x-1)^n}{n!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

4. 将下列函数展开成 x 的幂级数:

(1) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1}$, $x\in[-1,1]$;

(2) $\frac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}}$, $x\in(-2,2)$.

5. (1) $shx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$, $x\in(-1,1]$.

(4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}$, $x\in[-1,1]$.

6. (1) $\sqrt{x^3}=1+\frac{3}{2}(x-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n3(2n-5)!!}{2^n n!}(x-1)^n$, $x\in[0,2]$.

(2) $\lg x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln 10}(x-1)^n$, $x\in(0,2]$.

7. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

8. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}$, $x\in(0,6)$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$, $x\in(-6,-2)$

10. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{4^{n+1}}-\frac{1}{5^{n+1}})(x-2)^n(|x-2|<4)$

11. $\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n+1}}(x+4)^{n-1}(|x+4|<4)$.

12. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

13. $f(x)=\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\cdots+\frac{\cos(x_0+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$.

14. (1)2e; (2) $\frac{\cos1+\sin1}{2}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$.