习题4.5

1. 略

2. (1) $f(x)=\pi^2+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 12}{n^2}\cos nx.$

(2) $x\neq(2k+1)\pi$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2}{n^2+4}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+4}\sin nx\right)\right),$$

当 $x=(2k+1)\pi$ 时,

$$\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-e^{-2\pi})\left(\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2}{n^2+4}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+4}\sin nx\right)\right)=\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{2}.$$

(3) $x\neq(2k+1)\pi$ 时,

$$f(x)=\frac{a-b}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}(b-a)\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}\sin nx\right),$$

$x=(2k+1)\pi$ 时,

$$\frac{a-b}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}(b-a)\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}\sin nx\right)=\frac{a-b}{2}.$$

3. (1) $f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{9n^2-1}\sin nx \quad x\in(-\pi,\pi)$

(2) $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{e^{\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}(\cos nx-n\sin nx).$

其中$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4. $f(x)=\frac{k}{2}+\frac{2k}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2}+\cdots\right),\ (-2<x<0,\ 0<x<2).$

5. (1) $f(x)=\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 4x}{8}.$

(2) $f(x)=e^{ax}=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{2a\pi}+\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a}{a^2+n^2}(-1)^n\cos nx+\frac{n}{a^2+n^2}(-1)^{n+1}\sin nx\right].$

$-\pi<x<\pi.$

当 $x=\pm\pi$ 时,

$$\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{2a\pi}+\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a}{a^2+n^2}(-1)^n\cos nx+\frac{n}{a^2+n^2}(-1)^{n+1}\sin nx\right]=\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2}$$

(3) $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$

6. (1) $f(x)=\frac{11}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2}\cos 2n\pi x.$

(2) 当 $x\neq3(2k+1)$ 时,

$$f(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{(-1)^{n+1}6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right].$$

当 $x=3(2k+1)$ 时,

$$-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{(-1)^{n+1}6}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]=-2.$$

7. $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$；$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

8. $f(x)=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\cos nx$.

9. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx$, $x\neq(2k+1)\pi$.

当 $x=(2k+1)\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx=0$.

10. 略