导学 1.2

(1.2 数列的极限)

一、相关问题

1. 了解我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法,说明这一方法中隐含的数学思想是什么.

2. 说明函数与数列之间的关系.

二、相关知识

1. 构造一个数列,从几何上描述数列收敛的过程.

2. 写出数列极限的精确定义.

三、练习题

1. 下列说法是否可以作为 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限的定义?

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, 当 $n>\mathbf{N}$ 时, 不等式 $|x_n-a|\leqslant\varepsilon$ 成立;

(2) 对于无穷多个 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, 当 $n>\mathbf{N}$ 时, 不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立;

(3) 对于任给的 $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}$, 当 $n>\mathbf{N}$ 时, 有无穷多项 x_n, 使得不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立;

(4) 对于给定的 $\varepsilon_0=10^{-10}$, 不等式 $|x_n-a|\leqslant 10^{-10}$ 恒成立.

2. 判断数列 $\left\{x_n=\sin\dfrac{n\pi}{8},\ n\in\mathbf{N}\right\}$ 的敛散性.

3. 用数列极限的定义($\varepsilon-N$ 语言)证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$.

4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$. 反之是否成立?

四、思考题

1. 若 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两个发散数列,它们的和与积是否发散?若其中一个收敛,另一个发散,它们的和与积的敛散性又如何?

2. 说明数列的敛散性与其子列的敛教性关系.