

导学 1.4

(1.4 极限的运算法则)

一、相关问题

1. 如何求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$? 是否可以用函数或数列极限的定义求其极限值?

2. 如何利用一些已知函数或数列的极限, 计算一些复杂函数或数列的极限?

二、相关知识

1. 用函数极限的四则运算法则和复合运算法则求函数极限的前提条件是什么? 能否用极限的减法运算法则求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$? 并说明理由.

2. 以函数 $f(x) = \begin{cases} 2(1 - \cos x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + x^3, & x > 0 \end{cases}$ 为例, 研究分段函数在分界点处的极限.

三、练习题

1. 指出下面各题解法中的错误, 并写出正确的解法

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{x-3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} x}{\lim_{x \rightarrow 3} x-3} = \frac{\infty}{\infty};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - \lim_{x \rightarrow \infty} x + \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = \infty - \infty + 1 = 1;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{n^3} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

2. 求下列数列或函数的极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n});$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}.$$

四、思考题

1. 在同一极限过程中, 若函数 $f(x)$ (或数列 $\{x_n\}$) 的极限存在, 则 $|f(x)|$ (或数列 $\{|x_n|\}$) 和 $f^2(x)$ (数列 $\{x_n^2\}$) 的极限是否存在? 反之, 若函数 $|f(x)|$ (数列 $\{|x_n|\}$) 和 $f^2(x)$ (数列 $\{x_n^2\}$) 的极限存在, 则函数 $f(x)$ (数列 $\{x_n\}$) 的极限是否存在?

2. 在同一极限过程中, 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限都不存在 (或都存在、或仅其中一个存在) 时, 它们的和、差、积、商的极限是否存在?