

导学 1.5

(1.5 极限存在准则 两个重要极限)

一、相关问题

1. 我国古代数学家刘徽的割圆术的思想为：先依次求出圆的内接正六边形、正十二边形、正二十四边形、……、正 $6 \times 2^{n-1}$ 边形等一系列边数成倍增加的正多边形的面积 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$. 分析这个数列具有什么特性？具有这些特性的数列都收敛吗？

2. 一大学新生在银行存入 1000 元，复利率为每年 10%，按连续复利结算计算，10 年后这位同学在银行的存款有多少？

二、相关知识

1. 如何应用单调有界准则证明极限存在？
2. 单调有界准则和夹逼准则在使用上有何区别？

三、练习题

1. 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$ ，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求此极限.
2. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.
3. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 5x$.
4. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.
5. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$.

四、思考题

对以上“相关问题一”中提到的两个数列，讨论它们的敛散性.