

导学 2.6

(2.2.1 微分中值定理)

一、相关问题

1. 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, $x_0 \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的最值点, 分析 $f'(x_0)$ 的取值情况.
2. 甲、乙两人百米赛跑的成绩一样, 那么下面结论哪一个成立? 为什么?
 - A. 甲、乙两人每时刻的瞬时速度必定一样;
 - B. 甲、乙两人每时刻的瞬时速度都不一样;
 - C. 甲、乙两人至少在某时刻的瞬时速度一样;
 - D. 甲、乙两人到达终点时的瞬时速度必定一样.

二、相关知识

1. Lagrange(拉格朗日) 中值定理的结论有哪些不同的形式?
2. Cauchy(柯西) 中值定理的几何意义是什么?

三、练习题

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 方程 $f'(x) = 0$ 有 n 个互不相等的实根 x_1, x_2, \dots, x_n , 试证: 在 $f'(x)$ 的任意两个相邻实根之间至多只能有方程 $f(x) = 0$ 的一个实根.

2. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - f(x-1)],$$

求 c 的值.

3. 证明函数恒等式

$$\arctan x = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}, \quad |x| < 1.$$

4. 设 $f(x) \in C[0, \pi]$, 且在 $(0, \pi)$ 内可导, 证明: 至少存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使 $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$.

四、思考题

1. 为什么不将中值定理的“函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续和在开区间 (a, b) 内可导”这两个条件换成“函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导”这一个条件呢? 这样替换, 微分中值定理的叙述不是更简便吗?

2. Rolle(洛尔) 定理有三个条件, 缺少其中一个条件 Rolle 定理是否成立? 如果不成立, 能否说这三个条件是洛尔定理的必要条件?

3. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足 Rolle 定理的条件, 在 $[a, b]$ 内能否有无限多个 c , 使得 $f'(c) = 0$?