

导学 2.7

(2.2.2Taylor 公式)

一、相关问题

1. 在微分应用中已知 $f(x)$ 近似公式为:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

这里 $f(x)$ 是用 x 的一次多项式来近似表达, 其精度为 $(x - x_0)$ 的高阶无穷小, 但没有具体给出误差的表达式. 对于 $f(x)$ 如何提高近似精度? 能否给出估计误差的表达式?

2. 估计近似公式 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ ($x \in [0, 1]$) 的绝对误差.

二、相关知识

1. Taylor 公式的展开式中的多项式是如何构造的? 如何证明?
2. 如何利用一些常用函数的麦克劳林公式?

三、练习题

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明: 至少存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

2. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \quad (0 < \theta < 1), f''(x) \neq 0,$$

证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{2}$.

3. 求函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $x = 1$ 处的 Taylor 展开.

四、思考题

1. 泰勒公式的 Peano 余项和 Lagrange 余项各有什么不同的作用?
2. 以微分中值定理的证明为例, 说明构造辅助函数对命题的证明起到了什么作用?