

导学 3.2

(3.1.4 换元积分法(第一换元法、第二换元法——三角换元))

一、相关问题

1. 先观察以下积分的正确性

$$\int \cos 2x dx = \sin 2x + C, \int (ax + b)^m dx = \frac{1}{m+1} (ax + b)^{m+1} + C \quad (m \neq -1).$$

如果不正确, 能用什么方法解决以上积分的计算?

2. 如何计算积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$ ($a > 0$).

二、相关知识

1. 第一类换元法的关键步骤是什么?

2. 填空

$$dx = \frac{1}{a} d(\quad); \quad x dx = \frac{1}{2} d(\quad); \quad \frac{1}{x} dx = d(\quad);$$

$$\frac{1}{x^2} dx = -d(\quad); \quad \frac{1}{1+x^2} dx = d(\quad); \quad e^x dx = d(\quad);$$

$$\sin x dx = -d(\quad); \quad \cos x dx = d(\quad); \quad \sec^2 x dx = d(\quad).$$

3. 第二类换元法的含义是什么?

4. 推导教材上第(17 - 24) 基本不定积分公式, 并归纳基本不定积分公式的类别.

5. 三角换元法通常在什么情形下使用? 变量应如何回代?

三、练习题

1. 求下列不定积分

$$(1) \int \sin 2x dx; \quad (2) \int (ax + b)^m dx \quad (m \neq -1);$$

$$(3) \int \frac{1}{x \ln x} dx; \quad (4) \int \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x \ln x}} dx;$$

$$(5) \int \sec^6 x dx; \quad (6) \int \sin 2x \cos 3x dx.$$

2. 求下列不定积分

$$(1) \int x^3 \sqrt{4 - x^2} dx. ; \quad (2) \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}.$$

四、思考题

1. 第一类换元积分法(凑微分) 主要用于什么不定积分问题, 实质上是什么运算?

2. 写出一些常见函数的凑微分形式.