

导学 3.4

(3.1.6 有理函数的分解 3.1.7 有理函数的积分 3.1.8 三角函数有理式的积分)

一、相关问题

1. 观察不定积分 $\int \frac{1}{x^2-1} dx$, $\int \frac{1}{x-1} dx$, $\int \frac{1}{x+1} dx$, 它们之间有什么联系? 对更一般的多项式分式的不定积分也能这样计算积分吗?
2. 观察不定积分 $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx$, $\int \frac{2x^2+1}{x^3-x} dx$, 能否用前面学过的方法计算?

二、相关知识

1. 什么是有理函数?
2. 设多项式 $Q(x)$ 在实数范围内分解成一次因式和二次质因式的乘积为 $Q(x) = b_0(x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} (x^2+px+q)^{\lambda} \cdots (x^2+rx+s)^{\mu}$ (其中 $p^2-4q < 0, \dots, r^2-4s < 0$),

那么将有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成部分分式的代数和有几种方法?

3. 有理函数的积分方法与步骤是什么?
4. 什么是万能变换法? 一般在什么情况下使用?

三、练习题

1. 求下列有理函数的不定积分
 ① $\int \frac{5x-3}{x^2-x+1} dx$; ② $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} dx$; ③ $\int \frac{x^6+1}{x^4+1} dx$.
2. 求下列三角有理函数的不定积分
 ① $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; ② $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

四、思考题

万能代换法是不是最简单的代换? 举例说明.