

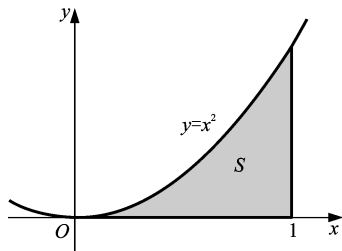
导学 3.6

(3.2 定积分 3.2.1 曲边梯形的面积 变力所作的功 3.2.2 定积分的概念

3.2.3 定积分的简单性质 积分中值定理)

一、相关问题

1. 在自然科学、工程技术和经济学的许多问题中,经常会计算各种平面图形的面积. 对于三角形、四边形及直多边形和圆的面积,可以用初等数学的方法计算,但由多条连续曲线围成的图形的面积的计算就复杂多了. 如图中阴影部分是由抛物线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$ 以及 x 轴所围成的平面图形,如何计算该图形的面积?



2. 一金属棒长 3 m, 离棒左端 x m 处的线密度 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ (kg/m). 问 x 为何值时 $[0, x]$ 一段质量为全棒质量的一半?

二、相关知识

1. 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 只与哪些因素有关?

2. 若在区间 $[a, b]$ 上, 函数 $f(x) \leq 0$ 时, 曲边梯形落在 x 轴的下方, 此时 $\int_a^b f(x) dx$ 还等于对应的曲边梯形的面积吗? 当 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有正有负时, 定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示的应该是什么?

三、练习题

1. 利用定积分几何意义, 求定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 的值.

2. 设 $f(x)$ 是连续函数, 若 $\int_0^2 f(x) dx = 2$, $\int_0^4 f(x) dx = 3$, 求 $\int_2^4 f(x) dx$.

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$ 计算 $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

4. 证明: $\frac{2}{3} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. 判断 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx$ 的符号.

6. 应用积分中值定理求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx$, (p, n 为自然数).

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明: 对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\exists \xi_n \in (0, 1)$, 使得

(1) $\frac{1}{n} \int_0^{\xi_n} f(x) dx = \int_{1-\xi_n}^1 f(x) dx$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \int_0^1 f(x) dx / [f(0) + f(1)]$.

四、思考题

1. 定积分的定义中所讨论的被积函数要求是闭区间上的连续函数，这个要求是否必要，请举例说明？

2. 定积分是不是等于 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ ？

3. $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b |f(x)| dx$ 与 $|\int_a^b f(x) dx|$ 在几何意义上是否相同？