

导学 3.7

(3.2.4 Newton – Leibniz 公式)

一、相关问题

1. 比较用定积分定义或定积分的几何意义来计算定积分 $\int_0^1 x dx$, 哪种较简单? 若对定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ 用以上两种方法是否也可行?
2. 设一物体沿直线作变速运动, 在时刻 t 时物体所在位置为 $s(t)$, 速度为 $v(t)$ ($v(t) \geq 0$), 则
 - (1) 它在 t 时刻的速度是多少?
 - (2) 如何用 $s(t)$ 表示物体在 $[a, b]$ 内的位移 s ?
 - (3) 如何用 $v(t)$ 表示物体在 $[a, b]$ 内的位移 s ? 结合上述问题你有什么发现?
3. 由于折旧等原因, 某机器转售价格 $R(t)$ 是时间 t (周) 的递减函数 $R(t) = \frac{3A}{4}e^{-\frac{t}{96}}$, 其中 A 是机器的最初价格. 在任何时间 t , 机器开动就能产生 $P = \frac{A}{4}e^{-\frac{t}{48}}$ 的利润. 问机器使用了多长时间后转售出去能使总利润最大? 该利润是多少? 机器卖了多少钱? (不必计算结果, 只分析求解思路)

二、相关知识

1. 变上限函数的导数有什么性质?
2. 一个函数的原函数有无穷多个, 那么利用 Newton – Leibniz 公式 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ 时, 会不会因为原函数选取的不同而得出不同的积分值?

三、练习题

1. 求解本导学相关问题中的第 3 个问题.

2. 设 $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $F'(x)$.

3. 设 $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$, 求 $F'(x)$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^{u^2} \arctan(1+t) dt \right] du}{(1 - \cos x) \ln(1+x)}$.

5. 计算下列定积分

(1) $\int_0^3 (3x^2 - x + 1) dx$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x) dx$; (3) $\int_0^1 (8^x - x^8) dx$.

四、思考题

1. 对积分 $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{(x-1)} \Big|_0^2 = -2$, 而被积函数 $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ 时, 其定积分的值应该大于零, 两者是否矛盾?

2. 为什么说 Newton – Leibniz 公式是微积分中最重要的定理?