

导学 4.1

(4.1.1 常数项级数的概念 4.1.2 常数项级数的基本性质

4.1.3 正项级数及其敛散性(比较法及其极限形式))

一、相关问题

1. 思考《庄子·天下篇》中“一尺之棰，日取其半，万世不竭”中蕴含的数学思想是什么？
2. 象棋游戏(几何级数增长问题). 有一个关于古波斯国王的传说，他对一种新近发明的象棋游戏留下深刻印象，以至于他要召见那个发明人而且以皇宫的财富相赠. 当这个发明人(一个贫困但却十分精通数学的平民)被国王召见时，他要求国王给予的是在棋盘的第一个方格里放一粒麦粒，第二个方格里放两粒麦粒，第三个方格里放四粒麦粒，如此继续下去，直到整个棋盘都被覆盖上为止. 国王能否满足他的要求？
3. 有限个实数相加，其和一定存在并且是一个实数，而无限个实数相加会出现什么结果呢？

二、有关知识

1. 常数项级数的定义是什么？如何讨论常数项级数的敛散性？
2. 若级数收敛，它会有哪些基本性质？
3. 正项级数的定义是什么？如何判断正项级数的敛散性？
4. 什么是比较审敛法？比较审敛法的一般形式和极限形式又是什么？

三、练习题

1. 证明级数 $1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ 是发散的.
2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散.
3. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 是收敛的($a_n > 0$)，求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 是收敛的.
4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

四、思考题

1. 当一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项 u_n 收敛于 0 时，该级数是否收敛？
2. 一个级数是否收敛与级数前面有限项的取值是否有关？
3. 如果加括号后所成的级数收敛，那么去括号后原来的级数是否也收敛？