

导学 4.2

(4.1.3 正项级数及其敛散性(比值法、根值法) 4.2 交错级数与任意项级数)

一、相关问题

1. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 有什么特点? 怎样讨论其敛散性?
2. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 有什么特点? 怎样讨论其敛散性?

二、相关知识

1. 如何使用比值审敛法、根值审敛法判定级数的敛散性?
2. 使用 Leibniz 定理时需要满足哪两个条件?
3. 条件收敛与绝对收敛的区别和联系是什么?
4. 如何判断任意项级数是否收敛, 是否绝对收敛?

三、练习题

1. 运用 Leibniz 判别法考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性.

3. 判别下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^2}; (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\alpha \in \mathbf{R}); (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}; (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{n+1}}{3^{n+1}}$$

4. 设 $u_n = (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$, 试判定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 的敛散性, 是绝对收敛, 还是条件收敛?

5. 设 $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2(1+x_n)}{2+x_n}$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

四、思考题

1. 能由比值审敛法判别敛散性的级数, 是否也能由根值审敛法判别?

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 且其和等于 S , 则任意重排后所得到的级数是否收敛, 是否绝对收敛, 和为多少?

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$ 都绝对收敛, 它们的乘积是否收敛? 若收敛, 乘积为多少?