

导学 4.3

(4.3.1 函数项级数的概念 4.3.2 幂级数及其收敛半径)

一、相关问题

由等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$, 想到了什么?

二、相关知识

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域有几种情况?

2. 收敛区间与收敛域之间有何区别? $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上一定绝对收敛吗? (R 为收敛半径)

三、练习题

1. 求下列级数的收敛半径与收敛区间

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x-1)^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-2)^n.$$

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛区间.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间, 并讨论该区间端点处的敛散性.

4. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域.

5. 求下列级数的收敛域: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-1)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x^n}$.

6. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径.

7. 求幂级数 $\sum_{n=1}^m (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径与收敛域.

8. 求 $\sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{1}{4^n n} x^{2n-3}$ 的收敛半径与收敛域.

四、思考题

1. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径.

2. 对“缺项”的幂级数如何求其收敛半径、收敛域?