

导学 4.4

(4.3.3 幂级数的运算性质 4.3.4 幂级数的和函数及其性质)

一、相关问题

通过对级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 的敛散性的讨论,你想到了什么?

二、相关知识

1. 幂级数有哪些运算性质?
2. 幂级数的和函数有哪些性质?

三、练习题

1. 运用幂级数运算性质求解下列各题

(1) 求级数 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12}\right) + \cdots$ 的和;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ 的和.

2. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n$ 的和函数.

3. 求级数 $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots (|x| < 1)$ 的和.

4. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \cdots + \frac{n}{a^n}\right) (a > 1)$.

四、思考题

求幂级数的和函数有哪些常用的方法?