

导学 4.5

(4.4 函数展开成幂级数)

一、相关问题

若函数 $f(x)$ 是 $n + 1$ 阶可导, 则可知函数在 $x_0 \in I$ 处能作 Taylor 展开, 而若函数任意阶可导, 相应的 Taylor 展开式是怎样的形式?

二、相关知识

1. $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内能展开成 Taylor 级数的充分必要条件是什么?
2. Maclaurin 级数跟 Taylor 级数的联系是什么?
3. 什么函数可以用直接展开法展开成幂级数?

三、练习题

1. 试在 $x = 0$ 处, 展开 $f(x) = e^x$ 为 Taylor 级数.
2. 试展开 $\frac{1}{2+x^2}$ 为 Maclaurin 级数.
3. 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.
4. 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的幂级数.

四、思考题

1. 函数的幂级数展开式是否具有唯一性?
2. 多项式函数的幂函数展开式是怎样的形式?
3. 由于级数与数列在形式上可以相互转化, 使得级数与数列的性质有了内在的密切联系. 因此, 数列极限的存在性及极限值问题, 可转化为研究级数收敛性问题. 试证明:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ 存在 (此极限值称为 Euler 常数).