导学 4.6

（4.5 Fourier 级数）

一、相关问题

1. 将不同频率的正弦波$\frac{\pi}{4}\sin t$，$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t$，$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t$，…，$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)t$，…. 逐个叠加会有什么现象发生？

2. 我们听到激烈的吉他弹奏或深情的萨克斯乐曲，实际上是由许多不同频率的声音组合起来的. 现代音响和音乐合成器本质上是具有特殊性能的电脑，利用它们能改变高频泛音和低频泛音（即所谓的纯音）组合形式，并能相当精确地获得复杂的音乐波形，从而产生动听的声音. 能否用已学习的数学知识解释这些现象？

二、相关知识

1. 什么是三角级数？

2. 设$f(x)$是周期为 2π的周期函数，它能展开成

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

那么系数 $a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots$ 与函数$f(x)$之间存在着怎样的关系？

3. 函数$f(x)$的 Fourier 级数是否一定收敛？如果收敛，它是否一定收敛于函数$f(x)$？

三、练习题

1. 设$f(x)$是周期为 2π 的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 将$f(x)$展开成 Fourier 级数.

2. 设$f(x)$是周期为 2π 的周期函数，它在$(-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

试写出$f(x)$的 Fourier 级数展开式在区间$(-\pi,\pi]$上的和函数$S(x)$的表达式.

3. 设$f(x)$是周期为 4 的周期函数,它在$[-2,2)$上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0\\ k, & 0\leqslant x<2\end{cases}$（常数 $k\neq 0$），将$f(x)$展开成 Fourier 级数.

4. 将函数$f(x)=2+|x|$，$(-1\leqslant x\leqslant 1)$展开成以 2 为周期的 Fourier 级数，并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和.

四、思考题

1. 比较分析函数展开成幂级数和 Fourier 级数的条件和其敛散性分析的方法.

2. 将函数$f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\end{cases}$展开成 Fourier 级数.