

导学 5.2

(5.3 向量的数量积、向量积及混合积)

一、相关问题

1. 人在路面上用绳子拉一个物体，绳子上的力 $\boldsymbol{F}$ 与路面所成的角为 θ ，物体产生的位移为 $\boldsymbol{S}$ ，求力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功.
2. 一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用在棒的一端 P 使棒绕其支点 O 转动，求力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩.

二、相关知识

1. 向量的数量积的定义是什么?
2. 向量的向量积的定义是什么?
3. 向量的数量积有哪些运算性质?
4. 向量的向量积有哪些运算性质?
5. 如何求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\text{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$?

三、练习题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为任意向量，证明 $|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|$.
2. 已知点 $A(1,1,0), B(1,0,0), C(0,1,0)$ ，求 (1) $\angle BAC$ ，(2) $\text{Prj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}$.
3. 设 $|\boldsymbol{a}| = 4, |\boldsymbol{b}| = 3, (\hat{\boldsymbol{a}}, \hat{\boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{6}$ ，求以 $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.
4. 设 $\boldsymbol{\alpha} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ，求同时垂直于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}$.
5. 试证明三个向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 共面的充分必要条件是 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$.

四、思考题

1. 向量的数量积与向量积的物理意义是什么?
2. 向量的数量积、向量积以及混合积的几何意义是什么?
3. 试用向量运算证明正弦定理和余弦定理.

$$(1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (2) c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$