

导学 5.4

(5.5 曲面及其方程)

一、相关问题

1. 满足方程 $x^2 + y^2 = 1$ 的点的集合在平面直角坐标系和空间直角坐标系中分别构成一个什么图形?
2. 怎么定义一般曲面的方程?

二、相关知识

1. 证明如果 $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, 那么由方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ 给出的曲面是一球面, 并求出球心坐标和半径.
2. 什么是旋转曲面方程? 一条平面曲线绕其所在平面内的一条坐标轴旋转所得到的曲面 S 的方程有什么特点?
3. 常用的二次曲面的标准方程是什么? 各代表什么二次曲面?

三、练习题

1. 下列方程各表示什么曲面?
(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 5 = 0$; (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 5 = 0$;
(3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 10 = 0$.
2. 将 xOy 平面上双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周, 求所形成的旋转曲面方程.

四、思考题

1. 过 x 轴和 y 轴分别作动平面, 交角 θ 为常数, 求交线的轨迹方程.
2. 将直线 $\frac{x}{\alpha} = \frac{y - \beta}{0} = \frac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转, 求旋转曲面的方程, 并就 α, β 的不同可能的取值情况, 分析对应的方程各代表什么曲面?
3. 已知椭球面方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (c < a < b)$, 试求过 x 轴且与椭球面的交线是圆的平面方程.